UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

Facultad de Ciencias, Exactas, Químicas y Naturales

Matemática
Cuadernillo de Ingreso

Tecnicatura Universitaria en Microbiología

Dr. Jonathan M. Schuster - jschuster@fceqyn.unam.edu.ar
2026

Tabla de contenido

COMENTARIO IMPORTANTE

El presente cuadernillo ha sido elaborado por la cátedra con el objetivo de cubrir los contenidos correspondientes a la Unidad 1 de la asignatura. Este material constituye un apoyo para el estudio, pero no reemplaza la asistencia a clases ni el trabajo activo del estudiante. Su correcta comprensión requiere complementarse con la participación en las clases presenciales, la realización de las actividades individuales y grupales propuestas, y el seguimiento de todas aquellas instancias y consignas que la cátedra indique durante el desarrollo del cursado.

1. La matemática como herramienta en las ciencias experimentales

La matemática constituye un lenguaje formal y una herramienta fundamental para el estudio, análisis y modelización de fenómenos en las ciencias experimentales. En disciplinas como la microbiología, la física, la química o la bioquímica, la matemática permite describir cuantitativamente la realidad, establecer relaciones entre variables, interpretar datos experimentales y construir modelos que expliquen o predigan comportamientos observables.

A diferencia del lenguaje cotidiano, el lenguaje matemático se caracteriza por su precisión, su univocidad y su coherencia lógica, propiedades indispensables en el trabajo científico y técnico.

La precisión implica que los conceptos y expresiones matemáticas tienen un significado bien definido y cuantificable. Por ejemplo, afirmar que una solución tiene una concentración de $2{,}5 \times 10^{-3}$ mol/L transmite una información exacta, mientras que expresiones como “concentración baja” o “cantidad pequeña” resultan ambiguas y poco útiles en un contexto experimental.

La univocidad del lenguaje matemático garantiza que una expresión admite una única interpretación. Una ecuación, una fórmula o un gráfico correctamente definidos representan siempre la misma relación entre variables, independientemente de quién los utilice. Por ejemplo, la expresión

$$C = \frac{n}{V}$$

representa de manera inequívoca la concentración (C) como el cociente entre la cantidad de sustancia (n) y el volumen (V), evitando interpretaciones subjetivas o contradictorias.

La coherencia lógica asegura que los razonamientos matemáticos siguen reglas formales que permiten deducir conclusiones válidas a partir de premisas conocidas. En el trabajo experimental, esta coherencia es esencial para verificar resultados, detectar errores y evaluar si una conclusión es compatible con los datos obtenidos. Por ejemplo, un valor negativo de masa o de concentración carece de sentido físico, y la matemática permite identificar inmediatamente este tipo de inconsistencias.

Mediante símbolos, ecuaciones, gráficos y modelos, la matemática no solo permite describir fenómenos, sino también compararlos, predecir su evolución y comunicar resultados de manera clara, objetiva y reproducible. Para el futuro técnico en ciencias experimentales, dominar este lenguaje resulta clave para interpretar mediciones, analizar datos, comprender modelos científicos y tomar decisiones fundamentadas en evidencia cuantitativa.

2. Magnitudes y medición

2.1. La medición como base del conocimiento científico

En las ciencias experimentales, como la biología, la química, la física o la microbiología, el conocimiento científico se construye a partir de la observación sistemática y la medición cuantitativa de los fenómenos naturales. La matemática desempeña un rol central en este proceso, ya que permite definir con precisión qué se mide, cómo se mide y cómo se interpretan los resultados obtenidos.

Aprender matemática resulta esencial porque toda medición científica implica trabajar con números, comparar valores, realizar cálculos, analizar escalas y evaluar la coherencia de los datos. Sin estas herramientas, no es posible interpretar resultados experimentales ni comunicar conclusiones de manera rigurosa.

2.2. Concepto de magnitud

Una magnitud es una propiedad de un fenómeno, cuerpo o sistema que puede ser medida y expresada cuantitativamente. Solo aquellas propiedades que pueden cuantificarse de manera objetiva y reproducible forman parte del análisis científico.

Ejemplos de magnitudes habituales en ciencias experimentales son:

- Masa de una muestra: Una muestra de suelo tiene una masa de 12,5 g.
- Volumen de una solución: Se preparan 250 mL de una solución acuosa en un matraz aforado.
- Temperatura de incubación: Un cultivo bacteriano se incuba a 37 °C.
- Concentración de una sustancia: Una solución presenta una concentración de 0,10 mol/L.

- Tiempo de un proceso biológico: El proceso de fermentación se deja transcurrir durante 48 h.

Estas magnitudes permiten describir y comparar sistemas de manera precisa, evitando interpretaciones subjetivas.

2.3. Unidades de medida

Medir una magnitud consiste en compararla con una unidad de medida, que actúa como patrón de referencia. El resultado de una medición se expresa siempre como:

$$\text{magnitud} = \text{valor numérico} \times \text{unidad}$$

Por ejemplo, afirmar que una muestra tiene una masa de $12{,}5$ g (gramos) o que una bacteria mide 2,1 μm (micras) proporciona información clara, precisa y verificable. El valor numérico por sí solo no tiene significado científico si no se indica la unidad correspondiente.

El uso de unidades estandarizadas, como las del Sistema Internacional (SI)[1], es fundamental para garantizar que las mediciones puedan ser comparadas y reproducidas. La matemática permite operar correctamente con estas unidades, realizar conversiones y verificar la coherencia de los resultados obtenidos.

2.4. Magnitudes continuas y conteo de objetos

Es importante distinguir entre magnitudes continuas y magnitudes discretas.

Las magnitudes continuas, como la masa, la longitud o el tiempo, pueden tomar infinitos valores dentro de un intervalo y siempre requieren una unidad de medida física para ser expresadas correctamente.

En cambio, algunas cantidades se obtienen mediante conteo de objetos discretos, como bacterias, células o colonias. En estos casos, el resultado se expresa como un número entero acompañado por la naturaleza del objeto contado. Por ejemplo, decir que hay *100 bacterias* no requiere una unidad física como el gramo o el metro, ya que la magnitud corresponde a una cantidad discreta. El objeto contado cumple el rol de unidad de conteo.

---

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_Internacional_de_Unidades

Sin embargo, cuando el conteo se combina con otras magnitudes, por ejemplo, al expresar una concentración bacteriana como *bacterias por mililitro,* vuelve a ser indispensable el uso explícito de unidades, ya que se relaciona una cantidad discreta con una magnitud continua (el volumen).

Reconocer esta diferencia es clave para interpretar correctamente datos experimentales y evita errores conceptuales frecuentes.

2.5. Escalas y órdenes de magnitud

En las ciencias experimentales se trabaja con fenómenos que abarcan escalas muy diversas, desde lo macroscópico hasta lo microscópico y submicroscópico.

- Escala macroscópica: objetos visibles a simple vista.
- Escala microscópica: células, bacterias.
- Escala submicroscópica: moléculas, átomos.

Comprender la escala de una magnitud permite situar correctamente el fenómeno estudiado y evaluar si los resultados obtenidos son razonables.

La matemática facilita el trabajo con distintas escalas mediante el uso de potencias de diez y notación científica, lo que permite comparar magnitudes que difieren en varios órdenes de magnitud, como el tamaño de una célula, una bacteria o una molécula.

2.6. Importancia para la formación técnica

Comprender qué es una magnitud, cómo se mide, qué unidades se utilizan y en qué escala se trabaja constituye una base indispensable para la formación en ciencias experimentales. El dominio de estos conceptos permite al futuro técnico:

- realizar mediciones correctas,
- interpretar datos experimentales,
- detectar errores e inconsistencias,
- comunicar resultados de manera clara y precisa.

Asimismo, es importante destacar que las magnitudes, las unidades y las escalas de trabajo no se abordan de una vez ni de manera aislada, sino que se van presentando y profundizando a lo largo de la carrera, en las distintas asignaturas y en el marco de las prácticas propias de cada disciplina. Cada campo de las ciencias experimentales utiliza magnitudes y escalas específicas, cuyo manejo adecuado se construye progresivamente a medida que el estudiante avanza en su formación académica y técnica.

De este modo, la matemática se presenta no solo como una materia de estudio, sino como una herramienta esencial de trabajo científico y técnico.

3. Conjuntos, números reales y operaciones básicas

3.1. Concepto de conjunto

En matemática, un conjunto es una colección de elementos que se consideran como un todo y que están bien definidos. Esto significa que, dado un objeto cualquiera, siempre es posible decidir si dicho objeto pertenece o no pertenece al conjunto.

Los elementos de un conjunto pueden ser números, objetos, símbolos o cualquier entidad claramente identificable. En este curso, trabajaremos principalmente con conjuntos de números, ya que estos constituyen la base para la medición, el cálculo y el análisis cuantitativo en las ciencias experimentales.

3.1.1. Formas de definir un conjunto

Existen dos formas habituales de definir un conjunto: por extensión y por compresión.

3.1.1.1. Definición por extensión

Un conjunto se define por extensión cuando se enumeran explícitamente todos los elementos que lo componen. Esta forma de definición es clara y directa, y permite identificar sin ambigüedades cuáles son los elementos que pertenecen al conjunto.

Por convención, los conjuntos se representan mediante letras mayúsculas, mientras que sus elementos se escriben entre llaves y en letras minúsculas.

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

En este caso, el conjunto Aestá formado por los números 1, 2, 3 y 4.

La definición por extensión resulta práctica cuando el conjunto posee pocos elementos. Sin embargo, deja de ser conveniente cuando el conjunto es muy grande o infinito, ya que no es posible enumerar todos sus elementos.

3.1.1.2. Pertenencia y no pertenencia

Para indicar si un elemento pertenece o no a un conjunto se utilizan los siguientes símbolos:

- $x \in A$: el elemento x pertenece al conjunto A.
- $x \notin A$: el elemento x no pertenece al conjunto A.

Ejemplos:

Si $A = \{1,2,3,4\}$ entonces:

$$2 \in A$$

$$5 \notin A$$

Estos símbolos permiten expresar de manera precisa la relación entre un elemento y un conjunto y son fundamentales para clasificar números.

3.1.1.3. Definición por comprensión

Un conjunto se define por comprensión cuando se describe una propiedad o condición que cumplen todos los elementos que pertenecen a dicho conjunto, en lugar de enumerarlos uno por uno. Esta forma de definición es especialmente útil para describir conjuntos grandes o infinitos, y es ampliamente utilizada en matemática y en las ciencias experimentales.

En notación matemática, un conjunto definido por comprensión se escribe de la siguiente forma:

$$A = \{\, x \in \mathrm{B} \mid x \text{ cumple una determinada propiedad} \,\}$$

En esta expresión:

- La letra mayúscula A representa el nombre del conjunto.
- La letra x representa un elemento genérico del conjunto.
- El símbolo $\in$ indica que x pertenece al conjunto B.
- La barra vertical "|" se lee como *"tal que"* y separa el conjunto de referencia de la condición que deben cumplir sus elementos.

- La expresión a la derecha de la barra describe la propiedad común de los elementos del conjunto.

Ejemplo:

$$A = \{x \in B \mid x \text{ es menor que } 5\}$$

Esta expresión se lee: "A es el conjunto B tales que x es menor que 5".

En este caso:

Si tenemos que $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,1000\}$

Entonces: $A = \{1,2,3,4\}$

La definición por comprensión permite expresar conjuntos de forma clara y rigurosa, evitando ambigüedades y facilitando el trabajo matemático en el análisis de problemas científicos.

3.1.2. Operaciones básicas con conjuntos

Además de definir y describir conjuntos, en matemática es fundamental poder relacionarlos entre sí. Las operaciones con conjuntos permiten organizar información, clasificar elementos y analizar relaciones, lo cual resulta especialmente útil en las ciencias experimentales al trabajar con grupos de datos, poblaciones, muestras o condiciones experimentales.

3.1.2.1. Inclusión de conjuntos

Se dice que un conjunto A está incluido en otro conjunto B si todos los elementos de A pertenecen también a B.

Se escribe:

$$A \subset B$$

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

En este caso, $A \subset B$, ya que todo elemento de A pertenece a B.

3.1.2.2. Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si contienen exactamente los mismos elementos, independientemente del orden en que estén escritos.

Se escribe:

$$A = B$$

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{3,2,1\}$$

Aunque estén escritos de manera diferente, $A = B$ porque poseen los mismos elementos.

3.1.2.3. Unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y Bes el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos.

Se denota:

$$A \cup B$$

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{3,4,5\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

3.1.2.4. Intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos.

Se denota:

$$A \cap B$$

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{3,4,5\}$$

$$A \cap B = \{3\}$$

3.1.2.5. Diferencia de conjuntos

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A pero no pertenecen a B.

Se denota:

$$A \setminus B$$

Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{3,4,5\}$$

$$A \setminus B = \{1,2\}$$

3.1.2.6. Conjunto vacío

El conjunto vacío es el conjunto que no contiene ningún elemento. Se denota por:

$$\emptyset$$

Ejemplo:
Si dos conjuntos no tienen elementos en común, su intersección es el conjunto vacío:

$$A \cap B = \emptyset$$

3.2. Conjuntos numéricos

Los números se agrupan en distintos conjuntos numéricos, cada uno de los cuales posee propiedades específicas y responde a diferentes necesidades de representación y cálculo. Reconocer a qué conjunto pertenece un número resulta fundamental para interpretar mediciones, seleccionar operaciones válidas y analizar resultados.

3.2.1. Números naturales ($\mathbb{N}$)

El conjunto de los números naturales está formado por los números utilizados para contar objetos discretos.

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5, \dots\}$$

En algunos contextos se incluye el cero. En este curso, se aclarará explícitamente cuando sea necesario.

Ejemplos de uso en ciencias experimentales:

- conteo de bacterias, células o colonias,

- número de muestras analizadas,
- cantidad de repeticiones experimentales.

Los números naturales no permiten representar resultados negativos ni fraccionarios, por lo que su uso es limitado a situaciones de conteo.

3.2.2. Números enteros ($\mathbb{Z}$)

El conjunto de los números enteros amplía a los números naturales incorporando el cero y los números negativos.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Los números enteros son útiles para representar:

- variaciones respecto de un valor de referencia,
- diferencias entre mediciones,
- incrementos y decrementos.

Ejemplo:

- una variación de temperatura de $-2\ °C$
- una diferencia de -3 unidades entre dos mediciones.

3.2.3. Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, \mathrm{b} \neq 0\right\}$$

Esta definición incluye todas las formas de escribir números que, en el fondo, representan una fracción de enteros, aunque no siempre se presenten explícitamente como fracción.

Ejemplos:

$$\frac{1}{2};\ -3;\ 0{,}25;\ 0{,}333\dots$$

3.2.4. Números irracionales ($\mathbb{I}$)

Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como fracción de números enteros. Su desarrollo decimal es infinito y no periódico.

Ejemplos:

$$\sqrt{2};\ \ \pi;\ \ e$$

Estos números aparecen frecuentemente en expresiones matemáticas, modelos teóricos y cálculos geométricos, aunque en la práctica experimental siempre se los aproxima mediante números racionales.

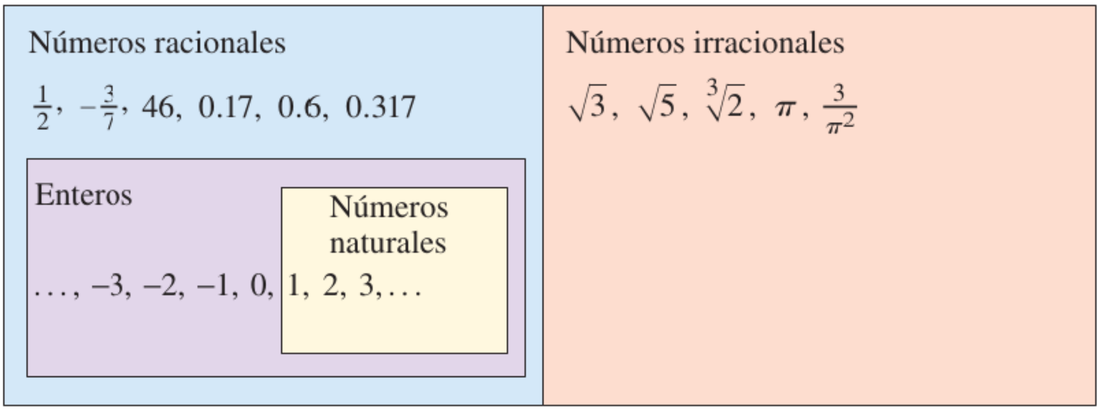

Figura 1. Esquema de los conjuntos numéricos: números naturales, enteros, racionales e irracionales, y sus relaciones de inclusión. Se observa que los números naturales están contenidos en los enteros, y estos a su vez en los racionales, mientras que los números irracionales forman un conjunto disjunto de los racionales dentro del conjunto de los números reales. Fuente: Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). Precálculo.

3.2.5. Números reales ($\mathbb{R}$)

El conjunto de los números reales está formado por la unión de los números racionales y los irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irracionales}\}$$

Los números reales permiten representar todas las magnitudes continuas utilizadas en ciencias experimentales, como longitud, masa, tiempo, temperatura o concentración.

Desde el punto de vista matemático, se asume que estas magnitudes toman valores reales, aunque toda medición experimental se exprese con un número finito de cifras.

3.2.6. Inclusión entre conjuntos numéricos

Los conjuntos numéricos se organizan de manera jerárquica, cumpliendo las siguientes inclusiones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Esto significa que:

- todo número natural es un número entero,

- todo número entero es un número racional,
- todo número racional es un número real.

Además, el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ también está contenido en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$), y se cumple que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Esto último indica que no existe ningún número que sea a la vez racional e irracional.

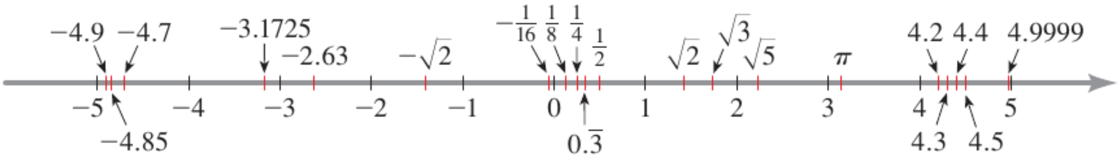

Figura 2. Representación de la recta real, en la que se muestran números racionales e irracionales ubicados según su valor. Cada punto de la recta corresponde a un número real, lo que permite visualizar el orden, la distancia y la densidad de los números reales. Fuente: Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). Precálculo.

3.2.7. La recta real

Los números reales pueden representarse mediante puntos sobre una recta, denominada recta real o recta de los números reales. Existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de esta recta.

Se fija un punto de referencia llamado origen, que corresponde al número real 0. La recta posee una dirección positiva, convencionalmente hacia la derecha.

- Los números positivos se representan a la derecha del origen.
- Los números negativos se representan a la izquierda del origen.
- Cada número real queda determinado por su posición sobre la recta.

Dada una unidad de medida conveniente, el número real $x$se representa por un punto ubicado a una distancia $| x |$ del origen:

- si $x > 0$, el punto se encuentra a la derecha del origen;
- si $x < 0$, el punto se encuentra a la izquierda del origen.

Con frecuencia se identifica un número real con el punto que lo representa en la recta real.

3.2.7.1. Orden en la recta real

Los números reales están ordenados. Dados dos números reales a y b:

- se dice que $a$es menor que b y se escribe $a < b$ si el punto correspondiente a $a$se encuentra a la izquierda del punto correspondiente a b;
- se dice que $a$es mayor que b y se escribe $a > b$ si el punto correspondiente a $a$se encuentra a la derecha del de b.

Los símbolos:

- $a \leq b$ indican que $a < b$ o $a = b$,
- $a \geq b$ indican que $a > b$ o $a = b$.

Ejemplos de desigualdades verdaderas:

- $7 < 7{,}4 < 7{,}5$
- $-\pi < -3$
- $\sqrt{2} < 2$
- $2 \leq 2$

La recta real permite visualizar de manera clara el orden, la distancia y la magnitud de los números reales.

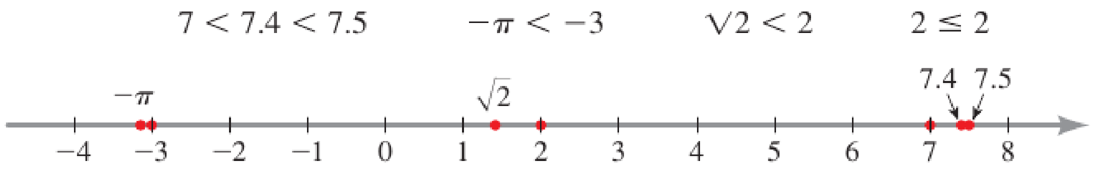

Figura 3. Representación del orden en la recta real. Los números reales se ubican sobre la recta de izquierda a derecha según su valor, lo que permite visualizar relaciones de orden como desigualdades estrictas y no estrictas entre números racionales e irracionales. Fuente: Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). Precálculo.

3.2.8. Valor absoluto

El valor absoluto de un número real a, denotado por $|\ a\ |$, se define como la distancia entre el punto que representa a a y el origen (0) en la recta real.

Como toda distancia, el valor absoluto es siempre positivo o cero, es decir:

$$|\ a\ | \geq 0 \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

-Definición de valor absoluto

Si $a$es un número real, su valor absoluto se define como:

$$|\, a \,| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Esta definición indica que:

- si el número es positivo o cero, su valor absoluto coincide con el número;
- si el número es negativo, su valor absoluto es su opuesto.

-Interpretación geométrica

En la recta real:

- $|\, a \,|$ representa la distancia entre a y 0;
- $|\, a - b \,|$ representa la distancia entre los puntos a y b.

Esta interpretación es fundamental para el estudio de desigualdades, errores de medición y tolerancias en las ciencias experimentales.

Ejemplos:

- $|\, 3 \,| = 3$
- $|\, -3 \,| = -(-3) = 3$
- $|\, 0 \,| = 0$
- $|\, 3 - \pi \,| = \pi - 3$, ya que $3 < \pi$ y por lo tanto $3 - \pi < 0$.

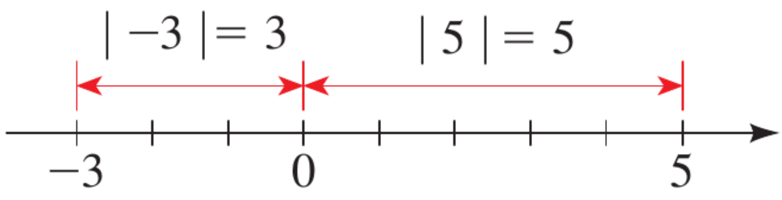

Figura 4. Interpretación geométrica del valor absoluto en la recta real. El valor absoluto de un número representa la distancia entre el punto correspondiente y el origen (0), independientemente del signo, como se observa en los ejemplos |−3| = 3 y |5| = 5. Fuente: Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). Precálculo.

3.3. Propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$

En este cuadernillo no se presenta una lista exhaustiva de todas las propiedades algebraicas, sino únicamente aquellas que se utilizan con mayor frecuencia.

En lo que sigue, se consideran a, b y c números reales, es decir:

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

Esto implica que las propiedades enunciadas también son válidas para los demás conjuntos numéricos ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{I}$), ya que todos ellos están contenidos en $\mathbb{R}$.

3.3.1. Propiedad conmutativa

La propiedad conmutativa establece que el orden de los operandos no altera el resultado.

Suma:

$$a + b = b + a$$

Producto:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Esta propiedad no se cumple para la resta ni para el cociente.

3.3.2. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de ese número por cada término:

$$c(a + b) = ca + cb$$

Esta propiedad es fundamental para simplificar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones.

3.3.3. Propiedad distributiva del cociente respecto de la suma (numerador)

Cuando una suma aparece en el numerador de un cociente, la división puede distribuirse:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} (c \neq 0)$$

Esta propiedad se utiliza con frecuencia en cálculos algebraicos y debe aplicarse con cuidado, verificando siempre que el denominador sea distinto de cero.

3.3.4. Advertencia importante: suma en el denominador

No existe una propiedad distributiva cuando la suma se encuentra en el denominador. En general:

$$\frac{a}{b + c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Este es un error muy común y debe evitarse.

Ejemplo numérico:

$$\frac{10}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$$

mientras que:

$$\frac{10}{2} + \frac{10}{3} = \frac{10}{2} + \frac{10}{3} = \frac{25}{3}$$

Como puede verse, los resultados no coinciden, por lo que la igualdad no es válida.

3.4. Propiedades de las operaciones sobre igualdades

Las siguientes propiedades describen cómo se comporta una igualdad cuando se realizan operaciones en ambos miembros. Estas reglas son fundamentales para la resolución de ecuaciones, ya que permiten transformar una igualdad en otra equivalente sin alterar su validez.

Sean a, b y c números reales.

-Suma en ambos miembros

Si $a = b$, entonces:

$$a + c = b + c$$

-Producto en ambos miembros

Si $a = b$, entonces:

$$a \cdot c = b \cdot c$$

-Cociente en ambos miembros

Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

-Propiedad del producto nulo

Si:

$$a \cdot b = 0$$

entonces:

$$a = 0 \text{ o } b = 0$$

Estas propiedades permiten justificar cada paso en la resolución de ecuaciones (como veremos más adelante), garantizando que las transformaciones realizadas mantienen la igualdad original.

3.5. Reglas de signos

Las reglas de signos describen cómo se comportan los números reales frente a la multiplicación y al cambio de signo. Su conocimiento es fundamental para realizar cálculos correctos y evitar errores frecuentes en la resolución de expresiones algebraicas y ecuaciones.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

-Doble signo $-$

$$-(-a) = a$$

El símbolo "$-$a" representa el opuesto de "a". Aplicar el signo menos nuevamente significa tomar el opuesto del opuesto, lo que devuelve el número original. Esta propiedad expresa que cambiar dos veces el signo no altera el valor del número.

-Producto con números negativos

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$$

Multiplicar uno de los factores por un número negativo equivale a cambiar el signo del producto. No importa cuál de los factores sea negativo: el resultado es el mismo. Esta propiedad justifica que el producto de un número positivo por uno negativo sea negativo.

-Producto por -1

$$(-1) \cdot a = -a$$

Multiplicar un número por -1 produce su opuesto. Esta regla permite interpretar el signo menos como una multiplicación por -1, lo cual resulta útil en la manipulación algebraica de expresiones.

3.6. Exponentes

3.6.1. Exponentes enteros (positivos, cero y negativos)

La notación exponencial se utiliza para representar de forma compacta el producto de un mismo número por sí mismo varias veces. Es una herramienta fundamental en matemática y aparece con frecuencia en notación científica, escalas y modelos utilizados en las ciencias experimentales.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

3.6.2. Exponentes enteros positivos

Si n es un entero positivo, la potencia a^n representa el producto de n factores iguales a a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Ejemplos:

- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

3.6.3. Exponente cero

Si $a \neq 0$, elevar un número real al exponente cero da como resultado 1:

$$a^0 = 1$$

Ejemplos:

- $5^0 = 1$
- $(-3)^0 = 1$

-Exponentes enteros negativos

Si $a \neq 0$ y n es un entero positivo, el exponente negativo se define como:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

Los exponentes negativos permiten representar cantidades pequeñas y son ampliamente utilizados en notación científica.

3.6.2. Reglas para trabajar con exponentes

A continuación, se presentan las principales reglas de los exponentes, que se utilizarán para simplificar expresiones algebraicas. No se demostrará su validez en este curso; se trabajará con ellas de forma operativa.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{Z}$.

Regla 1 - Producto de potencias de igual base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

- $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$
- $10^1 \cdot 10^3 = 10^4$

Regla 2 - Cociente de potencias de igual base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

- $\frac{5^4}{5^2} = 5^2$
- $\frac{2^3}{2^5} = 2^{-2}$

Regla 3 - Potencia de una potencia

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplos:

- $(2^3)^4 = 2^{12}$
- $(5^2)^3 = 5^6$

Regla 4. Potencia de un producto

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Ejemplos:

- $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$
- $(5 \cdot 4)^3 = 5^3 \cdot 4^3$

Regla 5. Potencia de un cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

- $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$
- $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3}$

Regla 6. Potencia negativa de un cociente (invertir la fracción)

Regla:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplos:

- $(3/4)^{-2} = (4/3)^2 = 16/9$
- $(2/5)^{-3} = (5/2)^3 = 125/8$

Interpretación: una potencia negativa invierte la fracción y cambia el signo del exponente.

Regla 7. Pasaje de un factor con exponente del numerador al denominador

Regla:

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

Ejemplos:

- $3^{-2} \,/\, 4^{-5} = 4^5 \,/\, 3^2 = 1024/9$
- $2^{-3} \,/\, 5^{-2} = 5^2 \,/\, 2^3 = 25/8$

Interpretación práctica: al pasar una potencia de un lado de la fracción al otro, se cambia el signo del exponente.

3.7. Notación científica

En las ciencias experimentales es habitual trabajar con números muy grandes o muy pequeños, que resultan incómodos de escribir, leer e interpretar en notación decimal habitual. Para resolver este problema se utiliza la notación científica, una forma compacta y estandarizada de expresar números mediante potencias de diez.

Por ejemplo, distancias astronómicas, masas atómicas, concentraciones muy bajas o muy altas y constantes físicas suelen involucrar valores que difieren en muchos órdenes de magnitud. La notación científica permite representar estos valores de manera clara, precisa y comparable.

3.7.1 Definición de notación científica

Se dice que un número positivo $x$está escrito en notación científica si se expresa de la forma:

$$x = a \times 10^n$$

donde:

- $1 \leq a < 10$,
- n es un número entero.

El número a se denomina mantisa y el exponente n indica el orden de magnitud del número.

3.7.2. Interpretación del exponente

- Si el exponente es positivo, el número es mayor que 1 y el punto decimal se desplaza hacia la derecha.
- Si el exponente es negativo, el número es menor que 1 y el punto decimal se desplaza hacia la izquierda.

Ejemplos:

- $4 \times 10^{13} = 40\,000\,000\,000\,000$
- $1{,}66 \times 10^{-24} = 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,66$

3.7.3. Importancia de la notación científica en ciencias experimentales

La notación científica es una herramienta fundamental porque permite:

- Simplificar la escritura de números extremadamente grandes o pequeños.
- Evitar errores al contar ceros en notación decimal.
- Comparar órdenes de magnitud, lo cual es esencial para analizar escalas en física, química y biología.

- Realizar cálculos con mayor facilidad, especialmente al multiplicar o dividir potencias de diez.
- Comunicar resultados de forma clara y estandarizada, facilitando la lectura de artículos científicos y reportes técnicos.

En microbiología, por ejemplo, es frecuente expresar:

- concentraciones bacterianas,
- masas de átomos o moléculas,
- tamaños celulares,
- concentraciones molares muy bajas,

mediante notación científica, ya que los valores involucrados suelen ser muy pequeños o muy grandes.

3.8. Radicales

Para dar significado a potencias cuyos exponentes no son enteros, es necesario introducir el concepto de radical o raíz. En particular, las raíces permiten interpretar potencias con exponentes racionales y aparecen con frecuencia en expresiones algebraicas y modelos científicos.

3.8.1. Raíz cuadrada

El símbolo $\sqrt{\ }$ representa la raíz cuadrada principal, es decir, la raíz no negativa.

Decimos que:

$$\sqrt{a} = b$$

si y solo si:

$$b^2 = a \text{ y } b \geq 0$$

Por esta razón, el símbolo $\sqrt{a}$ solo tiene sentido cuando $a \geq 0$.

Ejemplos:

- $\sqrt{9} = 3$, porque $3^2 = 9$ y $3 \geq 0$.
- Aunque 9 tiene dos raíces cuadradas (3 y -3), la notación $\sqrt{9}$ indica exclusivamente la raíz positiva.

Si se desea expresar la raíz negativa, debe escribirse explícitamente: $-\sqrt{9} = -3$

3.8.2. Raíz n-ésima

Si n es un entero positivo, la raíz n-ésima principal de un número real a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

si y solo si:

$$b^n = a$$

- Si n es par, se requiere que $a \geq 0$.
- Si n es impar, la raíz existe para cualquier número real a.

Ejemplos:

- $\sqrt[4]{81} = 3$, porque $3^4 = 81$.
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.

En cambio:

- $\sqrt{-8}$ no está definida en $\mathbb{R}$, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo.

-Observación importante

En general, la igualdad

$$\sqrt{a^2} = a$$

no siempre es verdadera. En realidad:

$$\sqrt{a^2} = |\, a \,|$$

Ejemplo:

- $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |\, -4 \,|$.

3.8.3 Propiedades de las raíces

A continuación, se presentan algunas propiedades básicas de las raíces n-ésimas, que se utilizarán para simplificar expresiones. En todas ellas se supone que las raíces involucradas existen en $\mathbb{R}$.

Regla 1. Raíz de un producto

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\,\sqrt[3]{27} = (-2) \cdot 3 = -6.$

Regla 2. Raíz de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,(b \neq 0)$$

Ejemplo:

- $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}.$

Regla 3. Raíz de una raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3.$

Regla 4. Raíz de una potencia (índice impar)

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5.$
- $\sqrt[5]{2^5} = 2.$

Regla 5. Raíz de una potencia (índice par)

$$\sqrt[n]{a^n} = \mid a \mid \text{ si } n \text{ es par}$$

Ejemplos:

- $\sqrt{(-3)^2} = \mid -3 \mid = 3.$
- $\sqrt{4^2} = \mid 4 \mid = 4.$

El manejo correcto de radicales y sus propiedades es indispensable para trabajar con exponentes racionales, simplificar expresiones algebraicas y comprender modelos matemáticos utilizados en las ciencias experimentales.

3.9. Exponentes racionales

Para definir el significado de un exponente racional, también llamado exponente fraccionario, es necesario utilizar el concepto de radical. Por ejemplo, para interpretar una expresión como $a^{1/3}$, debemos relacionarla con la raíz cúbica de a.

La definición de exponentes racionales se construye de modo que sea consistente con las leyes de los exponentes. En particular, si se cumple que:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$$

entonces resulta natural definir:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

-Definición de exponentes racionales

Sea $a$un número real y sea m/nun número racional, donde my $n$son enteros y $n > 0$. Se define:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

o de manera equivalente:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Si n es par, se requiere que $a \geq 0$ para que la expresión tenga sentido en el conjunto de los números reales.

Interpretación:

- El denominador del exponente indica el índice de la raíz.
- El numerador indica la potencia a la que se eleva el resultado.

De este modo, los exponentes racionales permiten unificar en una sola notación las operaciones de potenciación y radicación.

Ejemplos

- $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

- $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
- $9^{3/2} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$

4. Ecuaciones

4.1. Concepto de ecuación

Una ecuación es un enunciado matemático que afirma que dos expresiones son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación.

En álgebra, la mayoría de las ecuaciones contienen variables, que son símbolos (generalmente letras) que representan números.

Por ejemplo,

$$4x + 7 = 19$$

es una ecuación en la variable x.

La variable se denomina incógnita, y el objetivo es encontrar el valor que hace que la ecuación sea verdadera.

Los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación se llaman soluciones o raíces, y el proceso de encontrarlas se denomina resolver la ecuación.

4.2. Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones se dicen equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones.

Para resolver una ecuación, se busca transformarla en otra ecuación equivalente más simple, generalmente dejando la variable en un solo lado del signo igual.

4.3. Propiedades de la igualdad

Las transformaciones que permiten obtener ecuaciones equivalentes se basan en las siguientes propiedades:

-Suma o resta:

Si $A = B$, entonces

$$A + C = B + C$$

Es decir, sumar o restar la misma cantidad en ambos lados mantiene la igualdad.

-Multiplicación o división:

Si $A = B$ y $C \neq 0$, entonces

$$CA = CB$$

Multiplicar o dividir ambos lados por el mismo número distinto de cero mantiene la igualdad.

Estas propiedades son la base de todos los procedimientos de resolución de ecuaciones.

4.4. Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal (o ecuación de primer grado) es una ecuación en la que la variable aparece elevada a la potencia uno.

Una ecuación lineal en una variable puede escribirse, de manera general, como:

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y $a \neq 0$.

Las ecuaciones lineales tienen una única solución.

4.4.1. Ejemplos: ecuaciones lineales y no lineales

A continuación, se muestran algunos ejemplos que permiten distinguir entre ecuaciones lineales y ecuaciones no lineales.

-Ecuaciones lineales

$$4x - 5 = 3$$

$$2x = \frac{1}{2}x - 7$$

$$x - 6 = \frac{x}{3}$$

En estas ecuaciones, la variable $x$aparece únicamente elevada a la potencia uno y no se encuentra dentro de raíces ni en denominadores.

-Ecuaciones no lineales

$$x^2 + 2x = 8 \quad \text{(contiene el cuadrado de la variable)}$$

$\sqrt{x} - 6x = 0$ (contiene la raíz de la variable)

$\frac{3}{x} - 2x = 1$ (contiene el recíproco de la variable)

Las ecuaciones no lineales abarcan distintos tipos. En este módulo se estudiarán las ecuaciones lineales y cuadráticas, como el primer ejemplo. Otros tipos de ecuaciones no lineales, como las que contienen raíces o la variable en el denominador, podrán aparecer más adelante y se analizarán en su debido momento, cuando se disponga de las herramientas necesarias.

4.4.2. Solución de una ecuación lineal

Resolver la ecuación:

$$7x - 4 = 3x + 8$$

-Método de resolución

Se utiliza el método de reducción o "transposición de términos", que consiste en transformar la ecuación original en ecuaciones equivalentes hasta aislar la incógnita. Para ello se aplican las propiedades de la igualdad, realizando la misma operación en ambos miembros de la ecuación.

-Desarrollo paso a paso

Partimos de la ecuación dada:

$$7x - 4 = 3x + 8$$

Sumamos 4 a ambos lados para eliminar el término constante negativo:

$$7x = 3x + 12$$

Restamos $3x$ a ambos lados para reunir los términos con la variable en un solo miembro:

$$4x = 12$$

Dividimos ambos lados por 4 para despejar la incógnita:

$$x = 3$$

-Verificación de la solución

Sustituimos $x = 3$ en la ecuación original:

Lado izquierdo:

$$7(3) - 4 = 17$$

Lado derecho:

$$3(3) + 8 = 17$$

Como ambos lados son iguales, la solución es correcta.

Solución:

$$x = 3$$

4.5. Sistema de ecuaciones lineales (dos incógnitas)

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones que deben cumplirse simultáneamente.
En esta sección trabajaremos con el caso más simple: dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (por ejemplo, x e y).

En cursos posteriores pueden aparecer sistemas con más ecuaciones y/o más incógnitas, que se abordarán cuando corresponda.

4.5.1. Método de sustitución

El método de sustitución consiste en:

- Despejar una incógnita en una de las ecuaciones (por ejemplo y en función de x).
- Sustituir esa expresión en la otra ecuación.
- Resolver la ecuación resultante (que queda con una sola incógnita).
- Reemplazar el valor obtenido para encontrar la otra incógnita.
- Verificar la solución en ambas ecuaciones.

Ejemplo (paso a paso)

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

-Paso 1: despejar una incógnita

Despejamos y de la primera ecuación:

$$x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$$

-Paso 2: sustituir en la otra ecuación

Reemplazamos $y = 5 - x$ en la segunda ecuación:

$$2x - y = 1 \Rightarrow 2x - (5 - x) = 1$$

-Paso 3: resolver la ecuación resultante

$$2x - 5 + x = 1$$
$$3x - 5 = 1$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$

-Paso 4: hallar la otra incógnita

Reemplazamos $x = 2$ en $y = 5 - x$:

$$y = 5 - 2 = 3$$

-Paso 5: verificación

En $x + y = 5 \rightarrow 2 + 3 = 5 \rightarrow \text{OK}$

En $2x - y = 1 \rightarrow 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1 \rightarrow \text{OK}$

-Solución del sistema

$$x = 2$$

$$y = 3$$

4.5.2. Importancia de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales constituyen herramientas fundamentales para modelar y resolver problemas prácticos en distintas áreas de las ciencias y la tecnología. Permiten describir relaciones entre cantidades y obtener valores desconocidos a partir de información disponible.

-Importancia de las ecuaciones lineales

Una ecuación lineal se utiliza cuando el problema involucra una sola incógnita y una relación directa entre cantidades.

Ejemplo
Un frasco contiene una solución a la que se le agregaron 7 mL más de líquido. El volumen final es de 19 mL. ¿Cuál era el volumen inicial?

Si llamamos x al volumen inicial, el problema se modela mediante la ecuación:

$$x + 7 = 19$$

Resolviendo:

$$x = 12$$

Respuesta: el volumen inicial era de 12 mL.

-Importancia de los sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones se utiliza cuando el problema involucra dos o más incógnitas relacionadas entre sí, y la información disponible permite plantear varias ecuaciones simultáneamente.

Ejemplo

En un laboratorio se preparan dos soluciones. La suma de los volúmenes es de 50 mL. La segunda solución tiene 10 mL más que la primera. ¿Cuál es el volumen de cada solución?

Llamamos:

- x: volumen de la primera solución (en mL)
- y: volumen de la segunda solución (en mL)

El problema se modela con el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ y = x + 10 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$x = 20, y = 30$$

Respuesta: la primera solución tiene 20 mL y la segunda 30 mL.

4.6. Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado, en las que la variable aparece elevada a la potencia uno. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado, en las que la variable aparece elevada a la potencia dos.

4.6.1. Definición

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

4.6.2. La fórmula cuadrática

Las soluciones (o raíces) de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se obtienen mediante la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula permite hallar directamente las soluciones de cualquier ecuación cuadrática.

4.6.3. Ejemplo de resolución mediante la formula cuadrática

Resolver la ecuación:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

-Paso 1: identificar los coeficientes

Comparando con la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, se tiene:

$$a = 1, \qquad b = -2, \qquad c = -8$$

-Paso 2: aplicar la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

-Paso 3: obtener las soluciones

$$x = \frac{2 + 6}{2} = 4$$

$$x = \frac{2 - 6}{2} = -2$$

-Soluciones

$$x = 4$$

$$x = -2$$

-Paso 5: Verificación de las soluciones

Comprobamos sustituyendo cada valor en la ecuación original:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Para $x = 4$:

$$4^2 - 2(4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$$

Se verifica.

Para $x = -2$:

$$(-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

Se verifica.

Como en ambos casos el resultado es 0, las dos soluciones son correctas.

4.6.4. Ejemplo de ecuación cuadrática en biología

En ecología y biología experimental, el crecimiento de una población o el rendimiento de un proceso biológico puede aumentar hasta cierto punto y luego disminuir. En esos casos, una función cuadrática puede servir como modelo aproximado.

Ejemplo (crecimiento con óptimo)

La cantidad P de bacterias (en miles) en un cultivo, en función del tiempo t(en horas), puede modelarse aproximadamente por:

$$P(t) = -t^2 + 6t$$

Problema: ¿En qué instantes la población es de 8 mil bacterias?

Planteo de la ecuación

Buscamos los valores de $t$tales que $P(t) = 8$:

$$-t^2 + 6t = 8$$

Llevamos todo a un solo miembro:

$$-t^2 + 6t - 8 = 0$$

Multiplicamos por -1 para simplificar:

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

Resolución

Aplicamos la fórmula cuadrática:

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2}$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$t = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Soluciones

$$t = 2 \text{ y } t = 4$$

Interpretación biológica

La población alcanza las 8 mil bacterias en dos momentos distintos:

- A las 2 horas ($t = 2$ h)
- A las 4 horas ($t = 4$ h)

5. Vectores

En las matemáticas y en las ciencias experimentales, muchas magnitudes quedan completamente determinadas por un único valor numérico. Por ejemplo, una longitud de 5 m o una masa de 3 kg se describen únicamente mediante un número y su unidad. Este tipo de magnitudes se denominan escalares.

Sin embargo, existen situaciones en las que un solo número no resulta suficiente. Para describir el desplazamiento de un cuerpo como una bacteria o una pelota es necesario conocer no solo cuánto se mueve, sino también en qué dirección lo hace. De manera análoga, magnitudes como la velocidad, la aceleración o la fuerza requieren información sobre su magnitud y su dirección. Estas magnitudes se denominan vectoriales y se representan matemáticamente mediante vectores.

5.1. Descripción geométrica de vectores

Un vector en el plano puede definirse como un segmento de recta al que se le asigna una dirección. Gráficamente, se representa mediante una flecha que indica el sentido del desplazamiento.

Si un vector se representa desde un punto Ahasta un punto B, se lo denota como $\overrightarrow{AB}$. El punto Ase denomina punto inicial, mientras que el punto B es el punto terminal del vector.

La longitud del segmento que une los puntos A y B recibe el nombre de magnitud o módulo del vector y se representa por $|\ \overrightarrow{AB}\ |$. Para distinguirlos de otras cantidades, los vectores se denotan habitualmente con letras especiales o con una flecha sobre el símbolo.

Dos vectores se consideran iguales si poseen la misma magnitud y la misma dirección, independientemente de su posición en el plano. Esta noción de igualdad es consistente con la interpretación de un vector como un desplazamiento: dos desplazamientos son equivalentes si tienen igual longitud y dirección, aun cuando se apliquen en distintos puntos del plano.

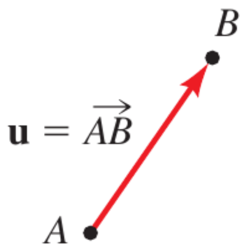

Figura 5. Representación geométrica de un vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$en el plano. El punto Aes el punto inicial y el punto Bes el punto terminal del vector; la flecha indica su dirección y sentido, mientras que la longitud del segmento representa su magnitud. Fuente: Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). Precálculo.

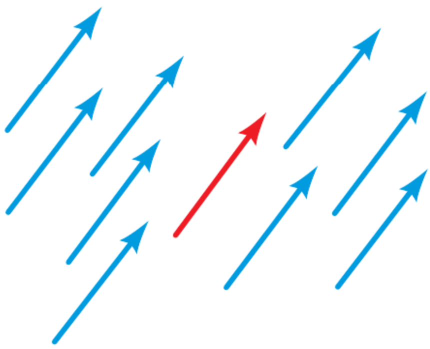

Figura 6. Conjunto de vectores con igual magnitud y dirección representados en distintas posiciones del plano. Todos ellos corresponden al mismo vector, ya que difieren únicamente en su punto de aplicación. Fuente: Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). Precálculo.

5.2. El plano coordenado

Para representar vectores en el plano es necesario introducir previamente el plano coordenado, también llamado plano cartesiano.

El plano coordenado está formado por dos rectas perpendiculares entre sí:

- el eje horizontal, denominado eje x;
- el eje vertical, denominado eje y.

Ambos ejes se intersectan en un punto llamado origen, cuyas coordenadas son (0, 0).

Cada punto del plano se representa mediante un par ordenado (x, y), donde el primer número indica la posición horizontal y el segundo la posición vertical. Este sistema de referencia permite describir posiciones, trayectorias y desplazamientos de manera precisa.

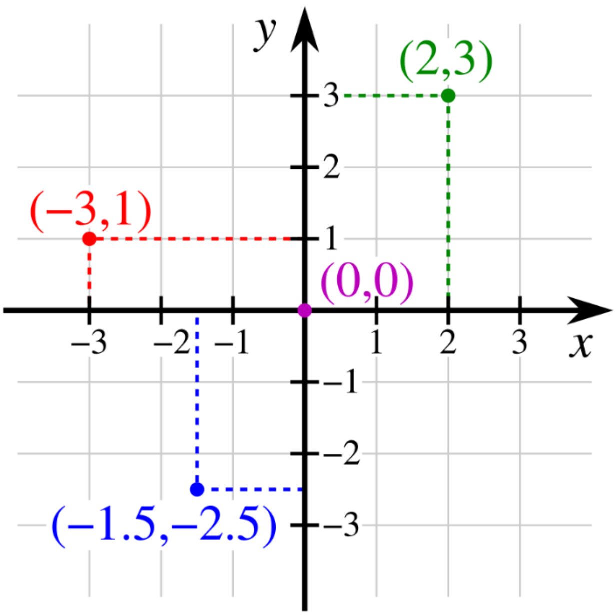

Figura 7. Tres ejemplos de coordenadas asignadas a tres puntos diferentes (verde, rojo y azul), sus proyecciones ortogonales sobre los ejes constituyen sus coordenadas cartesianas y el origen de coordenadas (0,0) en magenta. Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_cartesianas

5.3. Representación de vectores en el plano

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas en el plano. Un vector puede representarse como un desplazamiento desde un punto inicial hasta un punto final.

Si para ir del punto inicial al punto final se avanza $a$unidades en la dirección horizontal y $b$unidades en la dirección vertical, el vector se representa en forma de componentes como:

$$\vec{v} = \langle a, b \rangle$$

El número $a$se denomina componente horizontal del vector y el número $b$su componente vertical.

Es importante distinguir entre:

- el punto (a, b), que indica una posición en el plano, y
- el vector $\langle a, b \rangle$, que representa un desplazamiento.

Aunque ambos se escriban con los mismos números, su significado matemático y físico es distinto.

Un mismo vector puede representarse en diferentes lugares del plano, siempre que conserve su magnitud y su dirección. Por esta razón, un vector no depende de su punto de aplicación, sino únicamente de sus componentes.

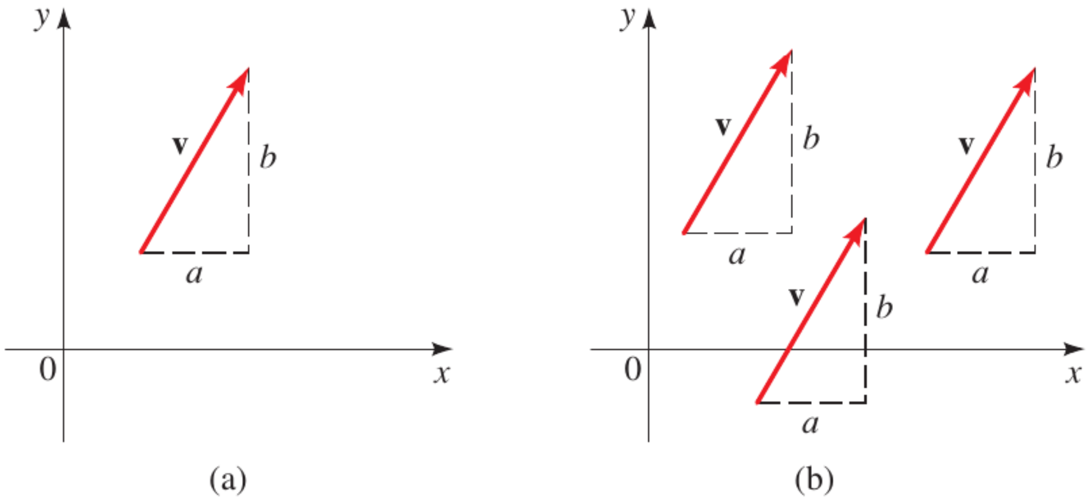

Figura 8. Representación de un vector $\vec{v} = \langle a, b \rangle$ en el plano coordenado. El vector se describe mediante sus componentes horizontal a y vertical b. Un mismo vector puede representarse en distintas posiciones del plano, siempre que conserve su magnitud y su dirección. Fuente: Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). Precálculo.

5.4. Forma componente de un vector

Si un vector tiene punto inicial $P(x_1, y_1)$ y punto terminal $Q(x_2, y_2)$, sus componentes se obtienen restando las coordenadas:

$$\vec{v} = \langle x_2 - x_1,\, y_2 - y_1 \rangle$$

Esta expresión permite pasar de una representación geométrica a una representación algebraica del vector, facilitando los cálculos.

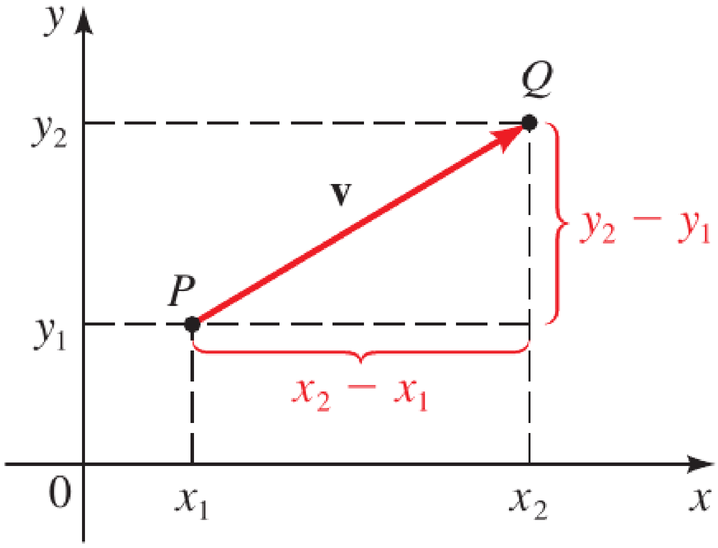

Figura 9. Forma componente de un vector en el plano coordenado. El vector $\vec{v}$se representa como el desplazamiento desde el punto inicial $P(x_1, y_1)$hasta el punto terminal $Q(x_2, y_2)$. Sus componentes se obtienen como $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$, correspondientes a los desplazamientos horizontal y vertical, respectivamente. Fuente: Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). Precálculo

5.5. Magnitud de un vector

La magnitud o módulo de un vector representa su longitud.

Si $\vec{v} = \langle a, b \rangle$, su magnitud se calcula mediante:

$$|\ \vec{v}\ | = \sqrt{a^2 + b^2}$$

La magnitud es un número real no negativo y expresa la intensidad de la cantidad vectorial representada. En el caso de un desplazamiento, el módulo indica la distancia recorrida.

Dos vectores son iguales si y solo si tienen las mismas componentes, es decir, si poseen igual magnitud y la misma dirección.

5.6. Operaciones algebraicas con vectores

Las operaciones algebraicas con vectores permiten combinar magnitudes vectoriales de forma coherente con su interpretación geométrica.

Sean $\vec{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$.

-Suma de vectores

La suma de dos vectores se define componente a componente:

$$\vec{u} + \vec{v} = \langle a_1 + a_2,\ b_1 + b_2 \rangle$$

-Resta de vectores

La resta se define como:

$$\vec{u} - \vec{v} = \langle a_1 - a_2,\, b_1 - b_2 \rangle$$

Esta operación representa el vector que permite pasar del extremo de $\vec{v}$ al extremo de $\vec{u}$.

-Producto de un vector por un escalar

Si c es un número real, el producto de un vector por un escalar se define como:

$$c\,\vec{u} = \langle ca_1,\, cb_1 \rangle$$

Esta operación modifica el módulo del vector:

- si $c > 0$, el vector conserva su sentido;
- si $c < 0$, el vector cambia de sentido;
- si $c = 0$, se obtiene el vector nulo.

5.7. Propiedades de los vectores

Las operaciones algebraicas definidas para los vectores cumplen una serie de propiedades fundamentales, que pueden demostrarse a partir de sus definiciones. Estas propiedades son análogas a las que cumplen los números reales y permiten operar con vectores de manera consistente.

El vector nulo, que se denota por $\vec{0} = \langle 0,0 \rangle$, cumple una función similar a la del número cero en la suma de números reales.

5.7.1. Propiedades de la suma de vectores

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores del plano. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

-Conmutatividad:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

-Asociatividad:

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

-Elemento neutro:

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

-Elemento opuesto:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

5.7.2. Propiedades de la multiplicación por un escalar

Sean $\vec{u}$ un vector y c y d números reales. Se cumplen las siguientes propiedades:

-Distributividad respecto de la suma de vectores:

$$c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$$

-Distributividad respecto de la suma de escalares:

$$(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$$

-Asociatividad del producto escalar:

$$(cd)\vec{u} = c(d\vec{u})$$

-Elemento neutro:

$$1\vec{u} = \vec{u}$$

-Escalar nulo:

$$0\vec{u} = \vec{0}$$

5.7.2. Vector unitario

Un vector unitario es un vector cuya magnitud es igual a uno. Los vectores unitarios se utilizan para representar direcciones sin considerar la intensidad de la magnitud.

Dado un vector no nulo $\vec{v}$, el vector unitario asociado a $\vec{v}$ se obtiene dividiendo el vector por su magnitud:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Si $\vec{v} = \langle a, b \rangle$, entonces:

$$\hat{v} = \langle \frac{a}{|\vec{v}|}, \frac{b}{|\vec{v}|} \rangle$$

El vector unitario tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector original, pero magnitud igual a uno.

5.7.2.1. Ejemplo: cálculo de un vector unitario

Sea el vector $\vec{v} = \langle 3,4 \rangle$.

-Cálculo de la magnitud

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

-Cálculo del vector unitario asociado

El vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ se obtiene dividiendo el vector por su magnitud:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$$

-Verificación

La magnitud del vector unitario es:

$$|\hat{v}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Por lo tanto, $\hat{v}$ es un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{v}$.

5.8. Comentario final sobre vectores.

El estudio de los vectores puede extenderse más allá de los contenidos desarrollados en esta unidad. En particular, es posible trabajar con vectores en el espacio tridimensional, lo que permite describir fenómenos que no se restringen al plano.

Asimismo, existen otras nociones y operaciones vectoriales de gran importancia, como el producto punto, el ángulo entre vectores y el producto cruz, ampliamente utilizadas en física, ingeniería y en diversas áreas de las ciencias biológicas para el análisis de fuerzas, movimientos y relaciones espaciales.

Estos conceptos no forman parte de los contenidos básicos de este curso y, por lo tanto, no se desarrollan en esta instancia. No obstante, en caso de ser necesarios para el análisis de alguna situación particular, o en cursos posteriores de la carrera, serán abordados oportunamente.

El objetivo principal de esta sección es que el estudiante reconozca qué es un vector, comprenda su significado y se familiarice con su representación y con las operaciones vectoriales elementales.

6. Guía de ejercicios y problemas

6.1. Verdadero o falso. Matemática y magnitudes experimentales.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique brevemente su respuesta cuando se considere necesario.

1. La matemática se utiliza en las ciencias experimentales únicamente para realizar cálculos numéricos.
2. El lenguaje matemático permite describir fenómenos de manera precisa y sin ambigüedades.
3. Una ecuación correctamente formulada puede tener más de una interpretación según el contexto.
4. La matemática contribuye a detectar errores e inconsistencias en los resultados experimentales.
5. En microbiología, la matemática es irrelevante porque la disciplina es fundamentalmente descriptiva.
6. Una magnitud es cualquier propiedad de un objeto, aunque no pueda medirse cuantitativamente.
7. Toda medición científica debe expresarse mediante un valor numérico y una unidad.
8. El conteo de bacterias es un ejemplo de magnitud discreta.
9. La concentración bacteriana (bacterias/mL) combina una magnitud discreta con una continua.
10. Trabajar con escalas y órdenes de magnitud permite comparar fenómenos muy diferentes entre sí.

6.2. Problema. La matemática como herramienta

Lea atentamente la siguiente situación y responda las consignas.

En un laboratorio de microbiología clínica se realiza el recuento de colonias bacterianas en una placa de Petri. Se toman 0,1 mL de una muestra diluida y, luego de la incubación, se cuentan 85 colonias. A partir de este dato, el técnico debe calcular la concentración de bacterias en la muestra original, expresar el resultado con las unidades correspondientes y evaluar si el valor obtenido es compatible con el rango esperado para ese tipo de análisis.

a) Identifique qué magnitudes intervienen en la situación planteada.

b) Indique qué operaciones matemáticas son necesarias para resolver el problema.

c) Explique por qué es indispensable el uso de unidades en este contexto.

d) Señale en qué momentos del procedimiento se utiliza la matemática y con qué finalidad.

6.3. Ejercicio: Conjuntos

Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$B = \{3,4,5,6\}$$

a) Indique cuáles de los siguientes números pertenecen y cuáles no pertenecen al conjunto A:

$$2,\ 5,\ 4$$

b) Determine los siguientes conjuntos:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $A \setminus B$
- $B \setminus A$

c) Indique si el conjunto Aestá incluido en B. Justifique.

6.4. Ejercicio: Conjuntos numéricos

Para cada uno de los siguientes números, indique a qué conjunto o conjuntos numéricos pertenece: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$.

a) 7

b) -3

c) $0{,}25$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\sqrt{2}$

f) -5

g) $3{,}1416$

Indique en cada caso el conjunto más pequeño al que pertenece el número.

6.5. Ejercicio: Clasificación de números en un contexto experimental

En un laboratorio se obtienen los siguientes valores durante una experiencia:

- número de colonias bacterianas: 120
- variación de temperatura respecto de un valor de referencia: -2 ºC
- concentración expresada como $0{,}005$ mol/L
- longitud de una bacteria: $1{,}8\ \mu$ m

a) Asocie cada valor con el conjunto numérico más adecuado.

b) Indique cuáles corresponden a magnitudes discretas y cuáles a magnitudes continuas.

6.6. Ejercicio: Valor absoluto

Calcule el valor absoluto en cada caso:

a) $|-4|$

b) $|7|$

c) $|-2{,}5|$

d) $|3-8|$

e) $|-1-4|$

6.7. Ejercicio: Recta real

a) Ubique en la recta real los siguientes números:

$$-4;\ -1;\ 0;\ 2;\ 3{,}5;\ \sqrt{2};\ \pi$$

b) Ordénelos de menor a mayor.

c) Indique cuál de ellos se encuentra más cerca del origen y justifique utilizando el valor absoluto.

6.8. **Ejercicio: Exponentes enteros (positivos, cero y negativos)**

Calcule y simplifique las siguientes expresiones:

a) 2^4

b) 5^0

c) 10^3

d) $(-3)^2$

e) 4^{-1}

f) 2^{-3}

Indique en cada caso el resultado final en forma de fracción o número decimal, según corresponda.

6.9. Ejercicio: Exponentes enteros negativos

Simplifique las siguientes expresiones utilizando la definición de exponente negativo:

a) 10^{-2}

b) 3^{-1}

c) $\frac{1}{2^{-3}}$

d) $\frac{5^2}{5^{-1}}$

e) $(2^{-2})^3$

6.10. Ejercicio: Reglas de los exponentes

Simplifique las siguientes expresiones aplicando las reglas de los exponentes:

a) $2^3 \cdot 2^5$

b) $\frac{10^6}{10^2}$

c) $(3^2)^4$

d) $(2 \cdot 5)^3$

e) $\frac{4^3}{2^3}$

6.11. Ejercicio: Notación científica

Escriba los siguientes números en notación científica:

a) $0{,}00045$

b) $7\,200\,000$

c) $0{,}0000000032$

d) $58\,000$

e) $1\,250\,000\,000$

6.12. Ejercicio: Operaciones con notación científica

(uso de calculadora)

En un laboratorio de microbiología se miden las siguientes concentraciones bacterianas:

- Muestra A: $3{,}2 \times 10^6$ bacterias/mL
- Muestra B: $4{,}5 \times 10^5$ bacterias/mL

a) Calcule la concentración total al mezclar volúmenes iguales de ambas muestras.
b) Calcule el cociente entre la concentración de la muestra A y la de la muestra B.
c) Exprese los resultados finales en notación científica.

6.13. Ejercicio: Radicales

Calcule, si es posible en $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{-9}$

c) $\sqrt[3]{-8}$

d) $\sqrt[4]{16}$

e) $\sqrt{49}$

Indique en cada caso si la raíz existe o no en los números reales.

6.14. Ejercicio – Exponentes racionales

Escriba cada expresión usando radicales y calcule su valor:

a) $9^{1/2}$

b) $8^{1/3}$

c) $16^{3/4}$

d) $27^{2/3}$

6.15. Ejercicio: Ecuaciones lineales

Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a) $5x - 7 = 18$

b) $3(x - 2) = 2x + 4$

c) $\frac{x}{4} + 3 = 5$

d) $7 - 2x = 3x + 12$

En cada caso:

- indique el valor de la incógnita,
- verifique la solución sustituyendo en la ecuación original.

6.16. Ecuaciones cuadráticas

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula cuadrática:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

c) $x^2 - 4 = 0$

En cada caso:

- identifique los coeficientes a, b y c,
- obtenga las soluciones y verifíquelas.

6.17. Problema aplicado: ecuación lineal

En un laboratorio se prepara una solución nutritiva para el cultivo bacteriano. Se dispone de un volumen inicial desconocido de solución, al cual se le agregan 15 mL. El volumen final obtenido es de 65 mL.

a) Defina la incógnita.

b) Plantee la ecuación que modela la situación.

c) Resuelva la ecuación.

d) Interprete el resultado en el contexto del problema.

6.18. Problema aplicado: ecuación cuadrática

La cantidad de bacterias $P(t)$ (en miles) en un cultivo, en función del tiempo t (en horas), puede modelarse aproximadamente por la expresión:

$$P(t) = -t^2 + 8t$$

a) ¿En qué instantes la población es de 12 mil bacterias?

b) Plantee la ecuación correspondiente.

c) Resuélvala utilizando la fórmula cuadrática.

d) Interprete el significado biológico de las soluciones obtenidas.

6.19. Sistema de ecuaciones lineales: problema aplicado

En un laboratorio de microbiología se preparan dos soluciones nutritivas, A y B, para el crecimiento bacteriano.

Se sabe que:

- la suma de los volúmenes de ambas soluciones es de 80 mL,
- la solución B tiene 20 mL más que la solución A.

a) Defina las incógnitas del problema.

b) Plantee el sistema de ecuaciones lineales que modela la situación.

c) Resuelva el sistema utilizando el método de sustitución.

d) Verifique la solución obtenida.

e) Interprete el resultado en el contexto del problema.

6.20. Verdadero o falso: Vectores

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique brevemente las falsas.

1. Un vector queda completamente determinado únicamente por su magnitud.
2. Dos vectores pueden tener la misma magnitud y distinta dirección.
3. Un vector puede representarse geométricamente mediante un segmento orientado.
4. El vector nulo tiene magnitud igual a cero y no posee dirección definida.
5. Dos vectores con igual dirección y sentido, pero distinta magnitud, son iguales.
6. La suma de vectores depende del orden en que se realice.
7. La multiplicación de un vector por un escalar puede cambiar su magnitud y su sentido.
8. Todo vector tiene un único vector unitario asociado.
9. La magnitud de un vector siempre es un número real no negativo.
10. El vector resultante de sumar un vector con su opuesto es el vector nulo.

6.21. Representación de vectores en el plano

Considere los siguientes vectores expresados en forma componente:

$$\vec{v}_1 = (2,1), \vec{v}_2 = (-1,3),\ \vec{v}_3 = (4,\ -2), \vec{v}_4 = (-3,\ -1), \vec{v}_5 = (0,2)$$

a) Represente gráficamente cada vector en el plano cartesiano, con origen en (0,0).

b) Indique en qué cuadrante se encuentra cada vector (cuando corresponda).

c) Compare visualmente las magnitudes y señale cuál es el vector de mayor módulo.

d) Indique si alguno de los vectores es vertical u horizontal, y justifique.

6.22. Vectores en una situación aplicada: parasitología

Durante el seguimiento microscópico de un parásito de aproximadamente 1 mm de longitud, se registra su desplazamiento sobre una superficie húmeda durante un intervalo de 1 hora.

Se toma como punto inicial el origen del sistema de coordenadas, es decir, el punto (0,0).

Se adopta el siguiente sistema de referencia en el plano:

- el eje x positivo apunta hacia la derecha y el eje x negativo hacia la izquierda;
- el eje y positivo apunta hacia arriba y el eje y negativo hacia abajo.

Luego de 1 hora, el desplazamiento observado es:

- 42 mm hacia la derecha, y
- 35 mm hacia arriba.

a) Represente el desplazamiento del parásito mediante un vector en el plano cartesiano, con origen en $(0, 0)$.

b) Escriba el vector desplazamiento en forma componente.

c) Calcule la magnitud del vector desplazamiento.

d) Interprete el resultado obtenido, indicando qué información brinda sobre el movimiento del parásito durante esa hora. Grafique.

Bibliografía consultada

-Universidad Nacional de Misiones, Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. (2026). Cuadernillo de ingreso: Matemática.

- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). *Precálculo*. International Thomson.

- Larson, R., & Falvo, D. C. (2012). Precálculo (8.ª ed.). Cengage Learning.