MATEMÁTICA

F.C.E. Q. y N. – U.Na.M.

2026

MATEMÁTICA
F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.
ingreso@fceqyn.unam.edu.ar
[www.fceqyn.unam.edu.ar]

[El presente Cuadernillo contiene el Programa de Contenidos del Requisito de Ingreso MATEMÁTICA. Lo puedes encontrar en el Aula Virtual de la FCEQyN o bien en el Centro de Estudiantes de la Facultad.

BIENVENIDOS

El presente material correspondiente al área **MATEMÁTICA** fue elaborado para que el **Aspirante a Ingresar en la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales** de la Universidad Nacional de Misiones, pueda acceder al Programa de Contenidos de mínimos de Matemática, exigidos para ingresar a las carreras de esta facultad y cuente con un material de estudio básico –con conceptos y actividades- que lo ayude en su preparación para el examen de admisión a la FCEQyN

La MATEMÁTICA es una disciplina, cuya enseñanza y aprendizaje es indispensable y está presente en los programas de ingreso para cualquier carrera que el estudiante se disponga a iniciar; sin embargo, es bien conocido que en los últimos años, los aspirantes a seguir estudios universitarios tropiezan con dificultades severas en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos exigidos, muchas de ellas, atribuibles a una deficiente formación previa.

Contribuir a enfrentar los nuevos desafíos y mejorar las condiciones con que ingresan los estudiantes y así aumentar sus posibilidades de éxito es uno de los propósitos de este curso, el cual forma parte de todo, un sistema diseñado para facilitar la transición entre la escuela media y la universidad.

El equipo Docente del Departamento de Matemática que coordina las acciones referidas al Área Matemática del Ingreso 2026 son:

- **Coordinadores Curso de Matemática**. **Sede Posadas y Puerto Rico**:
  - ✓ Mgter. ROXANA OPERUK.
  - ✓ Prof. ALEJANDRO MORENO.
- **Coordinadora Curso de Matemática Sede Apóstoles**:
  - ✓ Prof. NORMA BEATRIZ MARTYNIUK

El equipo docente que estuvo a cargo de la elaboración del presente material ha sido:

Alicia I. ABRAVANEL; Julia M. ANSÍN ANTILLE; Marys M. ARLETTAZ; Silvia CARONÍA; Adriana G. DUARTE, Nancy E. JAGOU; Julieta E. KORNEL; Luisa L. RIVERO; Graciela E. SKLEPEK.

El equipo docente que estuvo a cargo de las actualizaciones del presente material ha sido:

- Actualizaciones generales: FERNÁNDEZ, Eduardo, FREAZA, Nora; LAGRAÑA, Claudia; MORENO, Alejandro; RIVERO, Marta.
- Actualizaciones por unidad:
  - Unidad 1: BOROWSKI, Mirian; FERNÁNDEZ von METZEN, Gretel; MARTYNIUK, Norma; MERCADO, Joel; SCHUSTER, Jonathan.
  - Unidad 4: ZANG, Claudia; ABILGAARDT, Edith; MORENO Alejandro; PEREIRA, Franco; RODRIGUEZ BASSANI, Martín.

Los Contenidos a abordar se presentan a través de 4(cuatro) unidades temáticas que constituyen las partes del Cuaderno de Ingreso de Matemática.

PROGRAMA:

Tema 1: Conjuntos Numéricos

Números: Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales. Operaciones y propiedades. Notación científica. Orden. Representación en la recta numérica. Aplicación de las propiedades de las resoluciones de ecuaciones e inecuaciones. Número complejos. Forma binómica.

Tema 2: Funciones Polinómicas

Forma general. Grado. Análisis de gráficos de funciones polinómicas. Intersección con los ejes coordenados. Operaciones con polinomios. Divisibilidad de polinomios: Teorema del Resto y Teorema del factor. Factoreo. Simplificación de expresiones racionales. Resolución de ecuaciones racionales.

Tema 3: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ecuaciones de primer grado con una y con dos variables. Solución analítica y gráfica. Sistemas de dos ecuaciones con dos variables. Resolución analítica por igualación, sustitución o eliminación. Interpretación geométrica de las distintas soluciones.

Tema 4: Trigonometría

Sistemas de medición de ángulos. Relaciones trigonométricas de un ángulo. Relación fundamental de la trigonometría. Círculo trigonométrico. Funciones trigonométricas. Representación gráfica. Identidades trigonométricas. Aplicaciones: Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos, Forma trigonométrica de los números complejos.

OTRA INFORMACIÓN DE INTERÉS:

Las carreras de grado y pregrado de la FCEQyN son:

En Posadas

Bioquímica (duración **5 años y medio**) > **Módulos ingreso:** Matemática y Estrategias de Aprendizaje

Farmacia (duración **5 años**) > **Módulos ingreso:** Matemática y Estrategias de Aprendizaje

Ingeniería en Alimentos (duración **5 años**) > **Módulos ingreso:** Estrategias de Aprendizaje y Análisis I

Ingeniería Química (duración **5 años**) > **Módulos ingreso**: Estrategias de Aprendizaje, Elementos de Matemáticas e Introducción a la Ingeniería Química

Licenciatura en Análisis Químicos y Bromatológicos (duración **5 años**) > **Módulos ingreso**: Estrategias de Aprendizaje y Elementos de Matemáticas

Licenciatura en Genética (duración **5 años**) > **Módulos ingreso:** Matemática, Biología y Estrategias de Aprendizaje

Licenciatura en Enfermería (duración **5 años**)

Profesorado Universitario en Biología (duración **4 años**) > **Módulos ingreso:** Matemática, Biología y Estrategias de Aprendizaje

Profesorado en Física (duración **4 años**) > **Módulos ingreso:** Matemática y Estrategias de Aprendizaje

Profesorado en Matemática (duración **4 años**) > **Módulos ingreso:** Matemática y Estrategias de Aprendizaje

Tecnicatura Universitaria en Industrias Químicas y Ambiente (TIQAM). Mención en industrias de base Forestal (duración **3** años)

En Apóstoles

Analista en Sistemas de Computación (duración **3 años**, carrera de pregrado) > **Módulos ingreso:** Matemática, Introducción a la Informática y Estrategias de Aprendizaje

Licenciatura en Sistemas de Información (duración **5 años**) > **Módulos ingreso:** Matemática, Introducción a la Informática y Estrategias de Aprendizaje

Profesorado Universitario en Computación (duración **4 años**) > **Módulos ingreso:** Matemática, Introducción a la Informática y Estrategias de Aprendizaje

Secretaría Académica FCEQyN – UNaM.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

REQUISITOS ADMINISTRATIVOS:

a) Preinscripción:

a. 1. Se realizará utilizando la plataforma virtual del SIU adaptada al Sito de Secretaría Académica (desde los domicilios o cualquier PC conectada a Internet).

a. 2. Se realizará en Atención Personalizada en Ventanilla de Acceso al Depto. Alumnos de la Dirección Área Enseñanza en el 1er piso de la FCEQyN – Félix de Azara y Edificio de FCEQyN en Apóstoles.

En ambos casos se concretará por el rellenado del **Formulario on line Sur-1**; **documentación que acredite estar cursando el último año del Secundario** (o bien haber finalizado, enviando Título del Secundario) y el **DNI** en fotocopia (ventanilla) o escaneado y enviado por email (a los aspirantes no residentes en Posadas).

b) Inscripción Definitiva o Matriculación

Una vez que completes todo el Curso de ingreso podrás **Matricularte** a la carrera elegida, **en marzo de 2026**.

Requisitos

1. DNI (fotocopia de ambas caras, legible)
2. Partida de nacimiento actualizada (en el Registro Provincial de las Personas (lunes a viernes de 8 a 12 hs – Ver Ubicación)
3. Título secundario legalizado o certificado de título en trámite, o certificado actualizado de finalización de Nivel medio sin adeudar materias
4. Constancia de CUIL
5. Declaración jurada firmada (es el PDF de Preinscripción en el SIU)

ATENCION: Hay fechas límites para la Preinscripción y la Inscripción definitiva o Matriculación ESTAR MUY ATENTOS a la página web

Secretaría Académica FCEQyN – UNaM.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

Estimados Ingresantes

Están Ustedes comenzando a recorrer una nueva etapa de sus vidas, la que comprende la realización de estudios universitarios. Para hacerlo han elegido como vía la Universidad Nacional de Misiones, lo cual nos halaga y enorgullece.

Queremos decirles que quienes pertenecemos a esta casa de estudios, asumimos el compromiso de ayudarlos a transitar el camino de su formación, tratando de que lo hagan de la mejor manera posible, para llegar a la ansiada meta de lograr el título universitario que desean. No obstante, para ello deben prepararse apropiadamente. Esto debe entenderse desde el mismo inicio.

Orgullosamente pertenecemos al conjunto de Universidades Públicas de la República Argentina. Esto implica el deber de llevar a cabo una serie de actividades que conforman nuestra razón de ser. La más conocida e importante de ellas es la enseñanza. Se trata no solamente de la introducción de conocimientos, habilidades, prácticas o, en general, competencias exclusivamente propias de cada profesión, también consiste en procurar la formación y el desarrollo de valores característicos de las sociedades justas, tales como la solidaridad, la libertad y la dignidad. Todo esto representa una serie de desafíos que debemos enfrentar mancomunadamente para poder lograrlos.

Entre Ustedes y nosotros debemos llevar adelante el proceso enseñanza y aprendizaje. Insistimos, Ustedes y nosotros, con la participación de sólo una de las partes no alcanza.

Desde el primer día deben saber que los estudios superiores involucran trabajo intelectual que requieren de mucho esfuerzo y dedicación. El logro de los objetivos será posible si se comprometen con el estudio. ¡Creemos que esto es posible!

Queremos decirles que, además del **cuadernillo** que consta de cuatro módulos, ponemos a disposición de Ustedes la posibilidad del “encuentro virtual” con nosotros a través del **aula virtual** donde podrán plantear sus inquietudes y/o realizar consultas relacionadas con su preparación matemática, los conceptos y actividades del cuaderno de ingreso y nosotros intentaremos dar respuestas a las mismas. Utilizaremos para esta interacción el **foro** o **e-mail**.

¡Bienvenidos entonces y comencemos la labor!

Equipo Docente de Matemática

UNIDAD 1: CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Idea intuitiva de conjuntos

En el lenguaje cotidiano, en un diario o una revista de actualidad, se usan normalmente las palabras conjunto o colección como, por ejemplo:

1. "El conjunto de jugadores de la Selección Nacional se concentrará en un hotel céntrico a partir de mañana."
2. "Una importante **colección** de estampillas será subastada el próximo lunes."
3. "El **conjunto** musical Los Diablos grabó su primer CD."
4. "El **conjunto** de los enteros no tiene primer elemento".
5. "Las estrellas no están uniformemente distribuidas en el espacio, sino que se concentran por miles de millones. Estos **conjuntos** de estrellas son llamados galaxias.

En matemáticas, también, cuando se estudian objetos de diferentes tipos, por ejemplo, *puntos*, *números*, *vectores*, en virtud de ciertas propiedades de estos objetos o elementos, forman **colecciones** o **conjuntos**.

Cada grupo o conjunto antes mencionado, está constituido por objetos: jugadores de fútbol, músicos, estampillas, números, estrellas. Estos objetos caracterizan a cada uno de los conjuntos.

Los ejemplos anteriores nos dan sólo una idea intuitiva del concepto de conjunto. Se considera a este como un concepto primitivo. Cualquier intento de definición nos llevaría a utilizar otras nociones (reunión, colección, agrupación) que quedaría sin definir.

Aceptaremos pues la existencia de objetos primitivos llamados **conjuntos**, y una relación binaria entre un conjunto y los elementos que lo constituyen, llamada **pertenencia**.

A los conjuntos se los suele designar por letras mayúsculas y a los objetos que los forman con letras minúsculas.

El signo $\in$ simboliza la relación de pertenencia. Si a es un elemento del conjunto A, la expresión $a \in A$ la leeremos "el elemento a pertenece al conjunto A". En cambio "el elemento a no pertenece al conjunto A" se simboliza como $a \notin A$.

Debemos tener presente que la noción de elemento es sólo relativa, no tiene sentido decir "a es un elemento", lo correcto es decir "a es un elemento del conjunto A".

1.1. Representación de conjuntos

Cada uno de nosotros podrá entonces formar un conjunto, reuniendo simplemente los objetos que desee.

i) Sea por ejemplo A, el conjunto formado por esta lapicera, este lápiz y esta calculadora. Utilizaremos como notación para el conjunto A:

$$A = \{esta\ lapicera, este\ lápiz, esta\ calculadora\}$$

Formaremos ahora el conjunto B constituido por dos de las tenistas más importantes de nuestro país.

$$B = \{Gabriela\ Sabatini, Mercedes\ Paz\}$$

Hemos formado los conjuntos A y B enumerando sus elementos, es decir por **extensión**. ¿Existe otra manera de representar conjuntos? Sí.

ii) Podemos además representar un conjunto enunciando una propiedad que cumplan sus elementos y sólo ellos. Esta representación se denomina por **comprensión**.

Sea C el conjunto formado por todos los insectos que tienen ocho patas. En este caso escribiremos:

$$C = \{x \mid x\ es\ insecto\ y\ x\ tiene\ 8\ patas\}$$

Sea D el conjunto definido por:

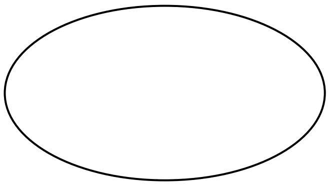
$$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ y\ x^2 - 2 = 0\}$$

Este conjunto D puede ser expresado también por extensión; en efecto, si resolvemos la ecuación $x^2 - 2 = 0$, vemos que los únicos valores que la satisfacen son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ que son dos números reales, por lo tanto:

$$D = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Tarea: Definir tres conjuntos indicando una o más propiedades que deban verificar sus elementos, es decir por comprensión.

iii) Para representar conjuntos en forma gráfica, utilizaremos curvas cerradas. Así por ejemplo al conjunto D lo representaremos por el siguiente diagrama, llamado diagrama de Venn.



Convendremos en representar a los elementos del conjunto por puntos situados en la región interior a la curva, y a los elementos que no pertenecen al conjunto por puntos en la región exterior a la misma.

2. El conjunto de los números naturales

Constantemente relacionamos conjuntos con distintos fines. Uno de ellos es el de contar sus elementos. Para contar utilizamos los **números naturales**.

Al principio, el hombre fue relacionando conjuntos para contar sus elementos. Al comparar cantidades, se acercó a nuestra noción actual de contar mediante correspondencias, por ejemplo, con partes del cuerpo: “tengo tantas vacas como dedos en una mano”.

Cada vaca se relaciona con un único dedo; los elementos del conjunto vaca se pueden “aparear” con el conjunto de los dedos de la mano; decimos, entonces, que estos conjuntos son **coordinables**, o que tienen el mismo **cardinal**.

El cardinal de un conjunto finito es un **número natural**.

Ejemplos:

El cardinal del conjunto de vacas es el número 5. El cardinal de notas musicales es 7. El cardinal del conjunto vacío es 0.

- Al conjunto de los números naturales lo designamos con $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4,5, \dots\}$$

- Las propiedades de $\mathbb{N}$ son:

1. Es **infinito** (∞).
2. Tiene primer elemento: cero. No tiene último elemento.
3. Todo número natural tiene un **sucesor.** Un número natural y su sucesor se dicen **consecutivos**.
4. Todo número (excepto cero) tiene un **antecesor**.
5. El sucesor c de un número natural b es mayor que él y su antecesor a es menor. Simbólicamente: $a < b < c$.
6. Entre dos números naturales existe siempre un **número finito** de números naturales. Por eso se dice que es un conjunto **discreto**.

3. El conjunto de los números enteros

Entonces, el hombre conoce los números naturales desde el momento en que tuvo necesidad de contar, pero estos no le alcanzan para expresar muchas situaciones.

Los números enteros son una ampliación de los naturales: los naturales se consideran enteros positivos (se escriben con el signo +). Los enteros negativos van precedidos del signo. El cero es un entero, pero no es ni negativo ni positivo.

Al conjunto de los números enteros lo designamos con $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$$

- Las propiedades de $\mathbb{Z}$ son:

1. Es **infinito** (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Todo número entero tiene un **sucesor**. Un número entero y su sucesor se dicen **consecutivos**.
4. Todo número entero tiene un **antecesor**.
5. El sucesor c de un número natural b es mayor que él y su antecesor a es menor. Simbólicamente: $a < b < c$.
6. Entre dos números enteros existe siempre un **número finito** de números enteros. Por eso, el conjunto de números enteros es **discreto**.

4. El conjunto de los números racionales

Los números naturales ni los números enteros son suficientes para poder expresar de forma adecuada las relaciones que existen entre una parte y el todo. De ahí que precisemos números fraccionarios y decimales para representar, por ejemplo, la parte de alumnos de la clase que aprueban todas las asignaturas, o la superficie que ocupa el patio respecto al centro.

Una fracción en el lenguaje común significa una porción o parte de un todo. En Matemáticas se usa también el término **fracción** para nombrar números que son una parte de la unidad o también aquellos números que sean iguales a un número entero más una parte de la unidad.

Ejemplos:

i) Tomás comió tres de las cuatro partes de las que constaba su tableta de chocolate $\rightarrow \frac{3}{4}$
ii) 4 dividido 3 $\rightarrow \frac{4}{3}$

- Se llama **fracción** a un cociente de números enteros, $\frac{a}{b}$, donde b es distinto de 0.
- Todo **número entero** se puede expresar como una **fracción** con denominador 1.

  Ejemplos: $3 = \frac{3}{1}$; $-4 = \frac{-4}{1}$

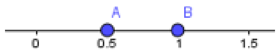
Todo número que puede ser expresado mediante una fracción es un **número racional**. A este conjunto de números los designamos con la letra $\mathbb{Q}$.

- Todo **número racional** se puede expresar como **número decimal exacto** o **periódico**.

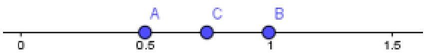
  Ejemplos: $0{,}4 = \frac{4}{10}$; $\frac{1}{3} = 0{,}333333 \ldots = 0,\hat{3}$

- Dos fracciones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, que cumplen la condición $ad = cb$ son **equivalentes**. Esto significa que expresan el mismo número racional.
- La unión del conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros y el conjunto de **números fraccionarios** que no representan números enteros es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los **números racionales**.
- Las propiedades de $\mathbb{Q}$ son:

1. Es **infinito** (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Entre dos números racionales existen infinitos racionales. Por ello, se dice que el conjunto de números racionales es **denso**.
   Ejemplo: Entre $\frac{1}{2}$ y 1 se puede encontrar tantos racionales como se quiera. Basta convertir estas fracciones en otras equivalentes de denominador mayor.

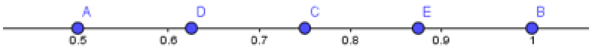


$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\quad \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ $\quad \frac{1}{1} = \frac{4}{4}$



$\frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{4}$

$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ $\quad \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$ $\quad \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$



$\frac{4}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{8}{8}$

4. Como consecuencia de la propiedad anterior, ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.

- Q es un conjunto **ordenado** por la relación menor o igual. Si los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fraccionarios irreducibles, se cumple que:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > cb$$

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3} > \frac{1}{5}$ porque $2 \cdot 5 > 3 \cdot 1$

b) $-\frac{1}{2} < \frac{6}{7}$ porque toda fracción negativa es menor que cualquier fracción positiva.

c) $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ porque toda fracción cuyo numerador es mayor que el denominador es mayor que la unidad.

La representación en la recta numérica de los distintos números que hemos visto hasta aquí es:

De acuerdo a lo que hemos desarrollado hasta aquí, nos podríamos preguntar:

¿Los números racionales completan la recta numérica? O, la misma pregunta con otras palabras, ¿quedan puntos de la recta a los que no les corresponde ningún número racional?

5. El conjunto de los números reales

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en el campo de los números racionales. La solución a esta ecuación requiere la descripción de los **números irracionales**.

Los números irracionales son aquellos cuya expresión decimal es infinita y no tiene un período, por ejemplo:

- El número pi: π
- El número de oro: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Las raíces de índice par de números naturales cuyos resultados no son naturales. *Ejemplo*: $\sqrt{2}; \sqrt{6};\ \sqrt[4]{8}; etc.$
- Las raíces de índice impar de números enteros cuyos resultados no son enteros. *Ejemplo*: $\sqrt[3]{7};\ \sqrt[5]{-2}; etc.$

Por tanto:

- Los números irracionales no se pueden expresar como una fracción o como un cociente de dos enteros.

- Para obtener un número irracional, es suficiente escribir un número cuyas cifras decimales sean infinitas y no presenten periodicidad.

Por *ejemplo*: $3{,}5155115551115555111115555511111\ldots\ldots$

La unión del conjunto $\mathbb{Q}$ de números **racionales** y el conjunto de números **irracionales** es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números **reales**. Este conjunto puede representarse mediante una recta, llamada **recta real**. Cada punto de esta recta representa un número real, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta. Por ello, con los números reales se completa la recta numérica.

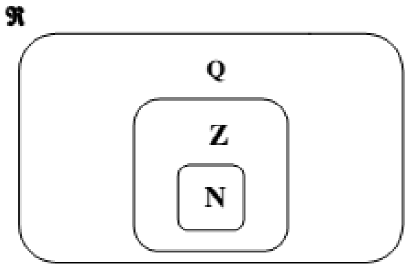
- Las propiedades de $\mathbb{R}$ son:

1. Es **infinito** (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Entre dos números reales existe siempre un número infinito de reales. Se dice que el conjunto de números reales es **denso**.
4. Ningún número real tiene sucesor ni antecesor.
5. El conjunto $\mathbb{R}$ es un conjunto totalmente ordenado por la relación menor o igual.
6. Es un conjunto **continuo**.

Hemos visto a los números naturales, enteros, racionales y reales. Un número natural es también entero, y un número entero puede escribirse como número racional utilizando una fracción que tenga un 1 en el denominador.

$$\text{Si } m \text{ es entero, entonces } \frac{m}{1} = m \text{ es racional}$$

Tenemos así dos grandes grupos de números: los racionales y los irracionales. Estos dos grandes grupos forman el conjunto de los números reales.



Los números reales tampoco son la solución a todas las ecuaciones (como, por ejemplo $x^2 + 1 = 0$), sin embargo nos aportan la estructura necesaria para comenzar a trabajar con situaciones matemáticas en las que utilizaremos las operaciones y sus propiedades definidas en los distintos conjuntos numéricos que describimos anteriormente.

Tarea: Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar cada una de las respuestas dadas:

a) $\pi = 3{,}14$

b) 0,1538 es un número irracional.

c) El producto de dos números irracionales es siempre otro número irracional.

d) Entre 1,25 y 1,26, sin considerar 1,25 y 1,26, hay infinitos números racionales.

e) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2{,}82$

f) $0{,}\hat{9} = 1$

6. Operaciones en los distintos conjuntos numéricos

Desarrollaremos a continuación las operaciones fundamentales y algunas de sus propiedades considerando los dos grandes grupos de números: los racionales y los irracionales.

6.1. Adición y Sustracción de Números Racionales

Para sumar o restar fracciones de igual denominador, el resultado es otra fracción de igual denominador que las dadas, y cuyos numeradores se obtienen sumando o restando los numeradores dados. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Cuando sumamos o restamos fracciones de distinto denominador, buscamos fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=\frac{9}{3}$$
$$\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{16}{20}-\frac{30}{20}+\frac{25}{20}=\frac{11}{20}$$

6.2. Multiplicación y División de Números Racionales

Para multiplicar fracciones, hacemos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Para dividir fracciones, hacemos:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad (\text{con } c\neq 0)$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$
$$\frac{4}{7}:\frac{3}{14}=\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{3}=\frac{4\cdot 14}{7\cdot 3}=\frac{8}{3}$$

6.3. Potenciación y Radicación de Números Racionales

Si p es un número racional y k un entero positivo, entonces $p^0=1$ si $p\neq 0$ y $p^1=p$:

$$p^k=\underbrace{p\,.\,p\,.\,p\ldots p}_{\text{k factores}}$$

$$p^{-k}=\underbrace{\frac{1}{p}\frac{1}{p}\ldots.\frac{1}{p}}_{\text{k factores}}\text{si } p\neq 0$$

Si p es un número racional y n un número natural:

$$\sqrt[n]{p}=q \iff q^n=p$$

Cuando realizamos las operaciones con números (sumamos, restamos, multiplicamos, etc.) hay ciertas reglas que debemos respetar; a este conjunto de reglas las denominamos propiedades. Conocer estas propiedades y manejarlas con soltura es importante.

7. Propiedades

No vamos a exhibir en este cuadernillo una lista exhaustiva de propiedades sino sólo aquellas que se utilizan con frecuencia y se olvidan con facilidad. En caso de "olvidos" de propiedades que no figuran aquí deberías recurrir a un texto del nivel secundario para consultar al respecto.

Se consideran a, b, c números que pertenecen a $\mathbb{R}$ (esto significa que también se las propiedades en los otros conjuntos numéricos porque $\mathbb{R}$ los incluye).

$a + b = b + a$	Propiedad conmutativa de la suma
$a \cdot b = b \cdot a$	Propiedad conmutativa del producto
$c(a + b) = ca + cb$	Propiedad distributiva del producto respecto de la suma
$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$	Propiedad distributiva del cociente respecto de la suma

Sin embargo, no hay una propiedad distributiva si la suma está en el denominador, es decir

$$\frac{a}{b + c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Por ejemplo: $\frac{6}{3+1} = \frac{6}{4} = 1{,}5$ y no es igual a $\frac{6}{3} + \frac{6}{1} = 8$

7.1. Propiedades de las Operaciones sobre Igualdades

1) Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$
2) Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$
3) Si $a = b$ y $c \neq 0$ entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
4) Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

Veamos una aplicación. Resolver la ecuación:

$$\frac{2}{3} \cdot (x - 1) = x + 1$$

Comenzamos multiplicando ambos miembros por 3:

$$3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x - 1) = 3(x + 1)$$

$2(x - 1) = 3(x + 1)$	distribuimos
$2x - 2 = 3x + 3$	sumamos 2 en ambos miembros
$2x = 3x + 3 + 2$	restamos $3x$ en ambos miembros
$-x = 5$	dividimos por -1 en ambos miembros
$x = -5$	es la solución

7.2. Reglas de Signos

1) $-(-a) = a$
2) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$

3) $(-1)\cdot a = -a$

Y finalmente una regla importante que nos conviene tener en cuenta cuando operamos con fracciones: $\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b} = a\cdot b^{-1}$

7.3. Algunas Propiedades de la Potenciación y la Radicación

Producto de potencias de igual base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Potencia de otra potencia: $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
Propiedad distributiva de la potenciación respecto del producto y cociente: $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

De estas propiedades se deduce que:

Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Recordatorio: No existe la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la suma o la resta, es decir: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ y $(a-b)^n \neq a^n - b^n$.

Ejemplo: $(1+2)^2 = 3^2 = 9$ mientras que $1^2 + 2^2 = 5$.

Una diferencia de cuadrados se factoriza así: $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ en tanto que el cuadrado de un binomio se resuelve de esta forma:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si la operación es la radicación, algunas propiedades son:

1) $\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

8. Notación científica

Un número que se puede expresar en la forma $a\cdot 10^n$, donde $1 \leq a < 10$, se dice que está escrito en *notación científica*. Por ejemplo:

a) 0,00000015 se puede escribir como $1{,}5\cdot 10^{-7}$

b) 120000000 se puede escribir como $1{,}2\cdot 10^{8}$

El número a es un decimal cuya parte entera tiene una sola cifra distinta de cero y n es un número entero.

9. Módulo de un número real

El módulo o valor absoluto de un número real x se simboliza $|x|$ y se define como:

$$si\ x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$si\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

Ejemplos:
a) $|2{,}5| = 2{,}5$
b) $|-2{,}5| = -(-2{,}5) = 2{,}5$

Otra forma de expresar el módulo de un número real x es:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Ejemplo: $x^2 = 36 \to \sqrt{x^2} = \sqrt{36} \to |x| = 6 \to x = 6$ ó $x = -6$

Desde el punto de vista geométrico, el valor absoluto de un número se puede interpretar, en la recta real, como la distancia entre ese número y el 0.

10. Radicales

10.1. Simplificación

Si n es impar entonces $\sqrt[n]{a^n}$. Si n es par entonces $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Si el índice y el exponente del radicando tienen un divisor común mayor que 1, se simplifican dividiéndolos por ese divisor común. En caso de que éste sea par se toma el valor absoluto del radicando.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{7^6} = 7^2$$

$$\sqrt[4]{(-5)^6} = \sqrt{(-5)^3}$$

10.2. Adición y sustracción de radicales:

Radicales semejantes: Son aquellos que tienen el mismo índice y radicando.

Al sumar o al restar radicales semejantes, se obtiene una expresión de un solo término.

Ejemplo: $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

Se pueden extraer del radical todos los factores cuyos exponentes sean mayores o iguales que el índice. Para ello, se factoriza el radicando, se descomponen los factores en forma conveniente, se distribuye la raíz con respecto al producto y se simplifica.

Ejemplo: $\sqrt[4]{9} - \sqrt{48} + \sqrt{8} = \sqrt[4]{3^2} - \sqrt{2^4 \cdot 3} + \sqrt{2^8} = \sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = -3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

10.3. Multiplicación y división de radicales:

Si los radicales tienen **igual índice**, se aplican estas fórmulas

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Para radicales de **índices distintos**, se buscan radicales equivalentes de modo tal que todos tengan el mismo índice.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{125} = \sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{(5^3)^3} = \sqrt[12]{3^4 \cdot 2^6 \cdot 5^9}$$

10.4. Racionalización de denominadores y/o numeradores

Consiste en transformar una expresión que contiene radicales en su denominador en otra equivalente, cuyo denominador sea racional.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

c) $\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

10.5. Exponentes Racionales

Para cualquier número n natural mayor que 1 y $a > 0$, se cumple que:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Las potencias de exponente racional cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

Para operar, en algunos casos conviene expresar los radicales como potencias y trabajar con estas aplicando sus propiedades.

Ejemplo: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{6}}$

11. Logaritmo de un número real

El logaritmo en base b de un número a es el número c, si b elevado al exponente c da como resultado a.

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \text{ donde } a, b \in R^+ \quad \wedge \quad b \neq 1$$

b es la base del logaritmo y debe ser un número real positivo y distinto de 1.

a es el argumento del logaritmo y debe ser un número real positivo.

Por ejemplo: $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

Se lee: "*el logaritmo en base 2 de 8 es 3*"

11.1. Propiedades de los logaritmos

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y el logaritmo del divisor.

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_b x^n = n \cdot \log_b x$$

- El logaritmo de 1 en cualquier base es igual a cero.

$$\log_a 1 = 0$$

- En cualquier base, el logaritmo de la base es 1.

$$\log_a a = 1$$

11.2. Logaritmos naturales y decimales

A los logaritmos de base 10 se los denomina **logaritmos decimales** y se escriben $\log x$.

Por ejemplo: $\log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$

Los logaritmos de base e se denominan **logaritmos naturales** y se escriben $\ln x$, equivale a $\log_e x$.

Por ejemplo: $\ln e = 1 \Leftrightarrow e^1 = e$

11.3. Cambio de base

Lo usual para resolver problemas es utilizar logaritmos decimales y naturales, que son los que se encuentran en la calculadora. Por ello, un cambio de base resulta conveniente para aquellos logaritmos que no presentan base 10 o base e.

$$\log_b a = \frac{\log_w a}{\log_w b}$$

Por ejemplo:

$$\log_4 64 = \frac{\log 64}{\log 4} = 3$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

Guía de ejercicios N°1

1. i) Ordenar de mayor a menor los siguientes números:

$$\frac{3}{5};\ -0{,}6; \frac{8}{4}; \frac{0}{3};\ -\frac{4}{2}; -1; \left|-\frac{7}{2}\right|; 0.\hat{9}; \sqrt{2}; e; -\sqrt{5}$$

ii) Representar los números dados en el ítem anterior en la recta numérica.

2. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta dada en cada caso.

   a) Entre 21 y 22 no hay números enteros (excluidos 21 y 22)

   b) Entre 2 y 3, sin considerar 2 y 3, hay infinitos números racionales

   c) Entre -2,5 y -2,6 hay infinitos números reales

   d) 4,33333333333... es un número irracional.

3. Resolver los siguientes ejercicios e indicar las propiedades utilizadas.

   a) $-2[(3^{138}: 3^{137} + 2): 5 - 1] + \sqrt[3]{-125}$

   b) $(-2)^{30}(-2)^5: (-2)^{21} + \sqrt[4]{(-3)^2 9} - 24: [2(-3) - 6]$

   c) $\dfrac{4 - ab - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{2ab}$

   d) $-\sqrt[3]{-24 - 3} - (1 + 5)^2 - 5^2 + \sqrt{10^4}\sqrt{10^4}: 2$

   e) $(-5)^7: (-5)^3: (-5) + \{[(-5)^2]^0\}^4$

   f) $\sqrt[4]{2^3 2} - \sqrt[5]{(-2)^6: (-2)} + \sqrt[3]{(-4)^2(-4)}$

   g) $3 + \dfrac{\frac{6}{5}:3 + \frac{1}{2}}{\frac{4}{5}:\frac{5}{6} - \frac{1}{4}}$

   h) $\sqrt{\frac{1}{16}}\,\sqrt[3]{-27}: \frac{3}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

4. Analizar las siguientes igualdades. ¿Se verifican? En caso negativo, escribir la expresión correcta.

   a) $(a + b)^{-2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ b) $(b^2 - b)^2 = b^2(b^2 - 2b - 1)$

   c) $\left(a - \sqrt{3}\right)^2 = a^2 - 3$ d) $\sqrt{3a} = \sqrt{3}\sqrt{a}$ e) $\sqrt{3} + \sqrt{a} = \sqrt{3 + a}$

5. Efectuar las operaciones que se muestran a continuación sin aproximar los números irracionales.

   a) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$ c) $\left(\sqrt{8} + 3\right)^2$

   b) $\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{24} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$ d) $\left(\sqrt{8} + \sqrt{2}\right)^2$

6. Aplicar las propiedades convenientes para resolver los siguientes ejercicios:

   a) $\sqrt[3]{\sqrt{(-2)^5(-2)}}$ c) $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{108}\right)$

   b) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}: \sqrt[3]{36}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{0{,}1 \cdot 10^{-5}\sqrt[4]{0{,}1 \cdot 10^{-5}}}}$

e) $\sqrt[5]{5 : \sqrt{5}}$

7. Obtener otra expresión equivalente con denominador racional.
   a) $\frac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$
   b) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}$
   c) $\frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
   d) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$
   e) $\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$

8. Hallar la medida en cm del perímetro de un triángulo equilátero de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm. De lado y expresar sin radicales en el denominador.

9. i) Resolver aplicando las propiedades de la potenciación.

   a) $2^{\frac{3}{4}}: 2^{-\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{5}}: 2\right)^{\frac{5}{4}}$ b) $\left(0{,}1^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{5}}: 10: 100^{-\frac{11}{10}} \cdot 10^{\frac{5}{3}}$

   ii) Expresar en forma de radical los resultados obtenidos en el ítem anterior.

10. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas?
    a) $0{,}0025 \cdot 10^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-1}$ b) $0{,}0025 \cdot 10^2 = 0{,}25 \cdot 10^0$
    c) $0{,}000056 = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$ d) $75 = 7{,}5 \cdot 10^0$
11. Sabiendo que la distancia de la Tierra a la Luna es 384.400.000 m y que la longitud promedio de una hormiga es de 0,0025 m. ¿Cuántas hormigas son necesarias para que acomodadas una detrás de la otra (en fila) cubran la misma distancia que hay entre la corteza terrestre y la luna?
12. En varias disciplinas se utilizan unidades que son menores que el milímetro para indicar tamaños de distintos tipos de células, bacterias y virus. Algunas de ellas son:

$$1\, micrón = 10^{-6}\, metros$$

$$1\, nanómetro = 10^{-9}\, metros$$

$$1\, angstrom = 10^{-4}\, micrones$$

    a) La distancia mínima que el ojo humano percibe, viendo dos puntos separadas, es un cuarto de milímetro. ¿A cuántos micrones equivale esa distancia?
    b) Un microscopio óptico nos permite percibir distancias de hasta 0,25 micrones. ¿A cuántos milímetros equivale ese valor?
13. Expresar el resultado de la siguiente operación en notación científica:

$$7{,}45 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}0000005625$$

14. La masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente: 0,0000000000000000000000017 gramos. Expresar este número en forma científica.
15. Indicar si se cumplen las siguientes igualdades, sabiendo que a es un número real positivo distinto de uno. Justificar la respuesta dada.

    a) $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$ b) $\log_{\sqrt{a}} a = \frac{1}{2}$ c) $\log_a \left(\frac{1}{a^2}\right) = -1$

    d) $\log_a 1 = 0$ e) $\log_a a^{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$ f) $\log_{\frac{1}{a}} a = 1$
16. Unir con flechas cada igualdad o desigualdad de la primera columna con su correspondiente solución en la segunda columna.

$\log a = 0$	$a > 1$
$\log a > 0$	$a = 1$

$\log a = 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

$\log a < 0$ $\qquad$ $a = 10$

17. Resolver aplicando propiedades

a) $\log_5 25 - \log_5 \left(\frac{1}{5}\right)$ $\qquad$ b) $\log_7 49 + \log_7 \left(\frac{1}{7}\right) - \log_7 7$

c) $\frac{\log 81}{\log 3}$ $\qquad$ d) $\log_2 32 - \log_2(4^2) + \log_2 0{,}5$

18. i) Decidir si los siguientes logaritmos están resueltos de forma correcta. Justificar la respuesta dada.

ii) Para los ejercicios que estén resueltos de manera incorrecta, proponer una resolución correcta.

a) $\ln\left(\frac{e^3\sqrt{e^3}}{e^2 \cdot e^{-4}}\right) = \frac{\ln(e^3\sqrt{e^3})}{\ln(e^2 \cdot e^{-4})} = \frac{\ln(e^3)\cdot\ln(\sqrt{e^3})}{\ln(e^2)\cdot\ln(e^{-4})} = \frac{3\cdot\ln(e)\cdot\frac{1}{3}\cdot\ln(e)}{2\cdot\ln(e)\cdot(-4)\cdot\ln(e)} = \frac{3\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot 1}{2\cdot 1\cdot(-4)\cdot 1} = -\frac{1}{8}$

b) $\log\left(\frac{0.01\cdot\sqrt[3]{100}}{10^{-1}\cdot 0.1}\right) = \log\left(0.01\cdot\sqrt[3]{100}\right) - \log(10^{-1}\cdot 0.1) =$

$$= \log 0.01 + \log\left(\sqrt[3]{100}\right) - \log(10^{-1}) + \log 0.1 =$$

$$= \log\left(\frac{1}{100}\right) + 3\log 100 - (-1)\cdot\log 10 + \log\left(\frac{1}{10}\right) =$$

$$= \log 1 - \log 100 + 3\log 100 - (-1)\cdot\log 10 + \log 1 - \log 10 =$$

$$= 0 - 2 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0 - 1 = 4$$

c) $\log_3\left(\frac{\sqrt[5]{(81:3^3)^2}}{\sqrt[3]{3}:9^{-3}}\right) = \log_3\left(\sqrt[5]{(81:3^3)^2}\right) - \log_3\left(\sqrt[3]{3}:9^{-3}\right) =$

$$= \frac{1}{5}\log_3((81:3^3)^2) - \left[\log_3\left(\sqrt[3]{3}\right) - \log_3(9^{-3})\right] =$$

$$= \frac{2}{5}\log_3(81:3^3) - \left[\frac{1}{3}\log_3 3 - (-3)\log_3 9\right] =$$

$$= \frac{2}{5}\log_3 81 - \frac{2}{5}\log_3(3^3) - \left[\frac{1}{3}\log_3 3 + 3\log_3 9\right] =$$

$$= \frac{2}{5}\log_3 81 - \frac{6}{5}\log_3 3 - \frac{1}{3}\log_3 3 - 3\log_3 9 =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 4 - \frac{6}{5} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -\frac{89}{15}$$

19. Un profesor de informática explica a sus alumnos que en computación se trabaja mucho con potencias de 2, ya que la información se mide en bits.

a) ¿Cómo podrías expresar, utilizando logaritmos, la cantidad de bits que se necesitan para representar 1024 combinaciones distintas?
b) ¿Cuántos bits obtiene?

20. La magnitud de un terremoto en la escala Richter se calcula con: $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ donde I es la intensidad del terremoto e I_0 es una intensidad de referencia. Si un terremoto tiene una intensidad de $I = 10^7 I_0$, ¿De cuánto es su magnitud?

21. El potencial de hidrógeno o pH de una solución se define: $pH = -\log[H^+]$

donde $[H^+]$ representa la concentración de iones de hidrógeno en una solución medida en moles por litro.

Las soluciones se clasifican de acuerdo con su valor de pH como ácida, básica o neutras. Se puede utilizar una escala de pH que va de 0 a 14. Cuando $0 < pH < 7$ la solución es ácida, cuando $pH > 7$ es básica (o alcalina), y cuando $pH = 7$, la solución es neutra.

i) La concentración de iones de hidrógeno en la sangre de una persona saludable suele ser $[H^+] = 3{,}98 \times 10^{-8}$ moles/litro. Hallar el pH de la sangre.
ii) Las frutas requieren un suelo más ácido que los vegetales. Suponga que dos suelos tienen un pH de 4,5 y 6,2, respectivamente. ¿Cuántas veces es más acido el primer suelo que el segundo?
iii) Se analizan dos muestras de agua extraídas de los desagües I y II de una fábrica. La concentración de $[H^+]$ de la muestra I es de 10^{-4} moles por litro, y el pH de la muestra II es de 4,699. ¿Cuál de las dos es más ácida?

UNIDAD 2: POLINÓMIOS

1. POLINOMIOS

Una expresión matemática constituida por un conjunto finito de variables (no determinadas o desconocidas) y constantes (números fijos llamados coeficientes), utilizando únicamente las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación, así como también exponentes enteros positivos en las variables, recibe el nombre de **polinomio**, que si tiene una sola variable x, es un **polinomio en la variable x**. En términos más precisos, es una relación n-aria de monomios, o una sucesión de sumas y restas de potencias enteras de una o de varias variables indeterminadas. Por ejemplo, la expresión $5x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ es un polinomio de tercer grado en la variable x, porque la tercera es la máxima potencia de la variable x que aparece en él. Los términos de este polinomio son: $5x^3$, $7x^2$, $4x$ y -12. Los coeficientes son 5, 7, 4, y -12.

En un polinomio los números expresados mediante cifras o letras son números reales y están relacionados a través de las operaciones: suma, resta, producto y potencia de exponente natural. Es decir todos los exponentes de las variables de un polinomio deben ser enteros no negativos. Por consiguiente, las expresiones $x^3 + x^{1/2}$ y $x^{-2} + 1$ **no son polinomios**, porque contienen exponentes fraccionarios y negativos (en su variable).

Cualquier constante diferente de cero, como 7, se clasifica como un polinomio de grado cero, ya que: $7 = 7x^0$. También al número cero nos referimos como una constante polinomial, pero no se le asigna grado alguno.

Los polinomios que tienen sólo uno, dos o tres términos reciben nombres especiales:

Números de términos	**Nombre del polinomio**	**Ejemplo**
uno	Monomio	$17\,x^5$
dos	binomio	$2x^3 - 6x$
tres	trinomio	$x^4 - x^2 + 2$
cuatro	cuatrinomio	$5x^6 - 2x^3 + 3x^2 - x$

La variable x en el polinomio representa cualquier número real. Por este motivo expresiones como 2x, x + 3 y $x^2 + x$ representan también números reales, cuyo valor depende del que tome x. Por ejemplo, si x = 3 los valores de las expresiones dadas serán 6, 6 y 12 respectivamente.

Ya que cada símbolo de un polinomio es un número real, se pueden usar las propiedades del sistema de los números reales para operar con ellos.

En general:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
(0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

Un polinomio de grado n en la variable x se puede escribir en cualquiera de siguientes formas estándar:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1\ x + a_0$$
$$P(x) = a_0 + a_1\ x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, . . . , a_1, a_0 son números reales, y los exponentes son enteros no negativos. El coeficiente principal es $a_n \neq 0$, y a_0 es el término constante.

Cabe aclarar que también se puede considerar que a_0 es el coeficiente del término a_0x^0.

2. OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Suma y resta de polinomios

Cuando se suman o se restan dos polinomios, el resultado es otro polinomio.

P(x) + Q(x) = S(x)

Al efectivizar dichas operaciones se suman o restan los coeficientes respectivos de iguales potencias de la variable, es decir se agrupan los términos semejantes (propiedad asociativa y conmutativa), para operar con ellos, o bien, se aplica la propiedad distributiva.

Por ejemplo, sean los polinomios: $P(x) = x + 2x^2 - 1$ y Q(x) = 3x + 2, hallar la suma de los mismos.

Solución: P(x) + Q(x) =

$= (2x^2 + x - 1) + (3x + 2)$	se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,
$= 2x^2 + x - 1 + 3x + 2$	se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,
$= 2x^2 + (x + 3x) - 1 + 2$	se suman los coeficientes de las potencias iguales de x.

$= 2x^2 + 4x + 1$

¿Por qué no es válido sumar los términos no semejantes? Es decir, suma de términos de distintos grados, como ser$2x^2$ y x^4?

Veamos otro ejemplo:

Dado los Polinomios $P(x) = 4x^3 - 10x^2 + 5x + 8yQ(x) = 12x^2 - 9x - 1$, efectuar la resta de los mismos.

Solución: P(x) - Q(x) =

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
(0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

$= (4x^3 - 10x^2 + 5x + 8) - (12x^2 - 9x - 1)$ se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,

$= 4x^3 - 10x^2 + 5x + 8 - 12x^2 + 9x + 1$ se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,

$= 4x^3 + (-12x^2 - 10x^2) + (5x + 9x) + (8 + 1)$ se suman los coeficientes de las potencias iguales de x, o bien se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$= 4x^3 + (-12 - 10)\, x^2 + (5 + 9)x + (8 + 1)$

$= 4x^3 - 22\, x^2 + 14\, x + 9$

Intentar lo siguiente

Dado los siguientes polinomios

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2xQ(x) = -2x^2 + 3x + 1/2$

$R(x) = 5x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3S(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x + 4$

Realizar las siguientes operaciones:

a) P(x) + S(x) b) R(x) − P(x) c) S(x) − S(x)

d) Q(x) + P(x) e) R(x) − S(x)

¿Qué se puede decir del grado del polinomio obtenido al sumar o restar dos polinomios?

Producto entre polinomios

Cuando se multiplican dos polinomios el resultado es otro polinomio, obtenido de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y las leyes de los exponentes.

P(x) Q(x) = T(x)

Veamos a través del siguiente ejemplo: Sean P(x) = 2x − 3 y $Q(x) = x^2 + 2x - 1$ Hallar P(x) Q(x)

Cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo:

$$(2x - 3) \quad . \quad (x^2 + 2x - 1)$$

Solución:

$P(x) \quad Q(x) \quad = 2x(x^2) + (2x)(2x) + (2x)(-1) + (-3)(x^2) + (-3)(2x) + (-3)(-1) =$

$= 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3\,x^2 - 6x + 3$

se asocian términos semejantes y se encuentra el resultado final:

$$P(x)Q(x) = 2x^3 + (4x^2 - 3x^2) + (-2x - 6x) + 3 = 2x^3 + x^2 - 8x + 3$$

Intentar lo siguiente

Dados los siguientes polinomios

$P(x) = -3x$ $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

$R(x) = x^2 - 3x + 5$ $S(x) = 2x^3 - 3x$

Realizar las siguientes operaciones:

a) P(x) S(x) b) R(x) S(x) c) Q(x) R(x)

¿Cómo se calcularían las siguientes potencias: $[S(x)]^2$; $[P(x)]^3$; $[Q(x)]^2$?.

Productos notables

Resolver los siguientes productos entre binomios:

a) (A + B) (A + B) b) (A − B) (A − B)

c) (A + B) (A − B) d) $(A + B)^2\,(A + B)$

donde A y B representan monomios cualesquiera.

¿Qué se puede decir de los polinomios obtenidos? Caracterizarlos.

A continuación, se ejemplifica lo solicitado en el ítem d) $(A + B)^2\,(A + B)$

Por definición de potencia podemos escribir:

$(A + B)^2\,(A + B) = [(A + B)\,(A + B)]\,(A + B)$

$= [A^2 + 2AB + B^2]\,(A + B)$

$= A^2\,(A + B) + 2\,AB\,(A + B) + B^2\,(A + B)$

$= A^3 + A^2B + 2\,A^2B + 2\,AB^2 + AB^2 + B^3$

$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

El polinomio obtenido es un **cuatrinomio cubo perfecto**. Entonces, encontrar el cubo de un binomio equivale a resolver cualquiera de los siguientes productos:

$$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B) = (A+B)^2(A+B)$$
$$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Resolver: a) $(4x-5)^3$ b) $(2x^2+x^3)^2$ c) $(4x+x^3)(4x-x^3)$

División de polinomios

La división de polinomios se realiza con un algoritmo similar al de la división entera.

Recordemos el algoritmo de la división entera

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & C \end{array}$$

Sabemos que en este algoritmo, el divisor (d) nunca es cero y el resto es menor que el divisor y se cumple que D = d.C + R. Es decir, que el dividendo (D) es igual al divisor (d) por el cociente (C) más el resto (R).

Para que la división entre polinomios sea otro polinomio, el divisor debe ser de grado igual o menor que el grado del dividendo.

Luego, en el caso de la división de polinomios, se cumple:

P(x) = Q(x) C(x) + R(x)

Analicemos el siguiente ejemplo:

Dividir el polinomio $P(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 6$ por $Q(x) = x^2 + x$

Solución:

$$\begin{array}{lrl|ll}
\text{Dividendo } [P(x)] \rightarrow & 3x^3 - x^2 - 2x + 6 & & \underline{x^2+x} & \rightarrow \text{Divisor } [Q(x)] \\
& \underline{-3x^3 - 3x^2 \qquad\qquad} & & 3x-4 & \rightarrow \text{Cociente } [C(x)] \\
& -4x^2 - 2x + 6 & & & \\
& \underline{4x^2 + 4x \qquad} & & & \\
& 2x + 6 & \rightarrow \text{Resto } [R(x)] & &
\end{array}$$

El procedimiento es el siguiente:

1. Se escriben los polinomios dividendo y divisor ordenados en forma decreciente y completa, es decir que, si faltara algún grado, el mismo se completa con coeficiente cero.

2. Se divide $3x^3$ (el primer término del dividendo) por x^2 (el primer término del divisor), para obtener 3x (el primer término del cociente). Se dividen los coeficientes y se restan las potencias.

3. Se multiplica $x^2 + x$ (el divisor) por 3x y se obtiene $3x^3 + 3x^2$.

4. Se cambia de signo obteniéndose $-3x^2 - 3x$ y se coloca debajo de los términos correspondientes en el dividendo.

5. Se suma para obtener $-4x^2$, y se escriben a continuación los demás términos del polinomio dividendo, el polinomio obtenido se trata como el nuevo dividendo.

6. Se divide $-4x^2$(el primer término del nuevo dividendo) por x^2, se obtiene -4 (el segundo término del cociente).

7. Se multiplica x^2+ x por − 4 y se suma el producto del nuevo dividendo cambiado designo. Este resultado, 2x + 6, representa el resto de la división debido a que es un polinomio de grado menor que el grado del divisor, por lo tanto, la división está terminada.

Como el resto no es cero, el polinomio dividendo no es múltiplo del divisor. Según la relación de la división entera, el polinomio dividendo se podrá escribir como:

$$3x^3 - x^2 - 2x + 6 = (x^2 + x) \cdot (3x - 4) + (2x + 6)$$

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Analicemos otro *ejemplo*:

Dados los polinomios $P(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ y $Q(x) = x^2 + 2$, efectuar la división: P(x):Q(x)

Solución:

Dividendo $P(x)$	$x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x - 8$	$x^2 + 0x + 2$	*Divisor* $Q(x)$
	$\underline{-x^4 - 0x^3 - 2x^2}$	$x^2 - 4$	
	$-4x^2 + 0x - 8$	Cociente C(x)	
	$\underline{4x^2 + 0x + 8}$		
Resto R (x):	0		

Como en este caso el resto es 0, el polinomio dividendo es múltiplo del divisor y la relación anterior se reduce a: P(x) = Q(x) C(x) poniendo en evidencia la posibilidad de escribir el polinomio dividendo como un producto de factores:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 + 2)\,(x^2 - 4)$$

Intentar lo siguiente:

i) Usar el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios.

a) $(x^3 - x^2 - x + 10) : (x^2 - 3x + 5)$ b) $(4x^3 - 5x^2 + x - 7) : (x^2 - 2x)$

c) $(5x^2 + 7x + x^3 + 8) : (x - 2)$ d) $(x^3 - 2x^2 - 13x + 6) : (x + 3)$

ii) Verificar cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto: P(x) = Q(x) C(x) + R(x).

Analizar la validez de la siguiente afirmación:

"La expresión $\frac{P(X)}{Q(X)} = C(X) + \frac{R(X)}{Q(X)}$, representa el resultado de la división de los polinomios P(x) y Q(x)".

División de un polinomio por un binomio de la forma $x - c$

Cuando se realiza la división entera de un polinomio P(x) por un binomio de la forma x − c, donde c es un número real, puede ocurrir que el resto sea de grado cero o que sea el polinomio nulo. Por lo tanto, el resto es un número que se designará con R.

El siguiente teorema relaciona el resto R obtenido de la división de un polinomio P(x) por x − c y el valor del polinomio en x = c.

Teorema del resto: "Cuando un polinomio P(x) se divide por x – c, el resto Res el valor del polinomio en x = c, esto es, R = P(c)."

En efecto:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - c \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} P(x) = (x - c) \cdot C(x) + R \\ P(c) = (c - c) \cdot C(x) + R \end{array}$$

Luego P(c) = R

Por ejemplo: si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, es posible anticipar cuál será el resto de dividirlo por x – 1, ya que según el teorema se tendrá:

R = P(1) = $(1)^3 - 3(1)^2 + 4$ = 2

También se puede escribir P(x) en términos de x – 1 encontrando el cociente C(x) y utilizando la expresión de la división entera:

P(x) = (x – 1) C(x) + 2

Si P(c) = 0, entonces x = c se constituye en una raíz de P(x), quedando P(x) expresado como un producto, es decir P(x) está factorizado, y en este caso se tendrá:

P(x) = (x – c) C(x)

Así, si el divisor fuera x − 2, se tiene que P(2) = $2^3 - 3.2^2 + 4$ = 0,

por consiguiente x – 2será un factor de P(x) y podrá expresarse de la siguiente manera:

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

Donde $C(x) = x^2 - x - 2$ es el cociente de la división, el cual puede obtenerse fácilmente mediante la regla de Ruffini.

A continuación se recuerda el algoritmo correspondiente a la regla de Ruffini:

1. En el primer renglón se escriben los coeficientes del dividendo (el cual debe estar completo y ordenado en forma decreciente). A la izquierda, sólo se escribe la raíz del divisor (el valor que lo anula).

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Los demás coeficientes se obtienen de la siguiente forma:

2. El coeficiente principal del dividendo (1) se copia abajo. Se lo multiplica por 2 y el resultado (2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (-3). Se suman -3y 2 y el resultado (-1) se escribe abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

3. El -1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (– 2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (0). Se suman 0 y – 2 y el resultado (-2) se escribe abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \end{array}$$

4. El -2 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (– 4) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (4). Se suman 4 y – 4y el resultado (0) es el resto. Se escribe abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

El resto es 0. Los valores 1, -1 y -2 son los coeficientes del polinomio cociente:

$C(x) = x^2 - x - 2$, cuyo grado es una unidad menor que el del polinomio dividendo.

Recuerda que la Regla de Ruffini sólo se podrá aplicar en cocientes donde el divisor es de la forma x – c.

Conviene tener presente que:

Decir que P(c) = 0, equivale a decir que:

(x – c) divide exactamente a P(x) o que P(x) es divisible por (x – c),

P(x) podrá expresarse como el producto: P(x) = (x – c).C(x) donde C(x) es el polinomio cociente entre P(x) y x – c.

Intentar lo siguiente

Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$ b) $(x^3 + 5x^2 - 7x + 8) : (x - 2)$

c) $(2x^3 + x^2 - 3x + 7) : (x + 1)$ d) $(x^3 + 27) : (x + 3)$

i) Utilizar el Teorema del Resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

ii) Cuando sea posible, factorizarlo en término del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

3. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Ya se ha dicho que factorizar un polinomio significa escribirlo como un producto equivalente al mismo.

Uno de los métodos básicos de factorizar es el inverso de multiplicar por un monomio: **factor común**.

Veamos este problema con un *ejemplo*:

El polinomio P(x) se puede factorizar extrayendo como factor común diversos factores. Dado:

$P(x) = 29x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2$ se podrán extraer por ejemplo: 3x, $6x^2$ o $4x^3$ obteniéndose:

$$P(x) = 29x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 3x\,(8x^8 - 6x^5 - 2x^3 + 30x)$$

$$P(x) = 29x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 6x^2\,(4x^7 - 3x^4 - x^2 + 15)$$

$$P(x) = 29x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 4x^3\,(6x^6 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{45}{2}x^{-1})$$

Del análisis de lo hecho anteriormente se desprende que:

• es posible extraer distintos factores, no necesariamente los comunes,

• para asegurar que el polinomio dado pueda expresarse como el producto de dos polinomios, el grado del monomio extraído como factor común deberá ser a lo sumo, igual al grado del término de menor grado del polinomio.

Siempre se puede controlar que el producto que se obtuvo es correcto, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma algebraica en $\Re$.

Otros recursos para factorizar están relacionados con los productos notables de binomios estudiados anteriormente.

A continuación se ejemplifica con algunos de ellos:

Polinomio	**Expresión desarrollada**	**Expresión factorizada**

Trinomio cuadrado perfecto	$A^2 + 2AB + B^2$ $A^2 - 2AB + B^2$	(A+B)(A + B) $= (A+B)^2$ (A-B)(A - B) $= (A-B)^2$
Cuatrinomio cubo perfecto	$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	(A+B)(A+B)(A+B) $= (A+B)^3$ (A-B)(A-B)(A-B) $= (A-B)^3$
Diferencia de cuadrados	$A^2 - B^2$	(A + B)(A − B)

Factorizar las expresiones anteriores resultó sencillo debido a que los polinomios involucrados eran “especiales”, por ejemplo: un trinomio cuadrado perfecto, una diferencia de cuadrados; por lo tanto fue posible recurrir a las técnicas de factoreo estudiadas en el nivel medio.

A continuación presentaremos una herramienta útil al momento de transformar un polinomio cualquiera en producto de factores, el **Teorema del Factor**.

"Un polinomio P(x) tiene un factor x − c , si y sólo si: P(c) = 0"

Este teorema asegura que basta encontrar un valor de "c" que anule a P(x), para determinar uno de los factores del polinomio dado; en efecto, este podrá escribirse como P(x) = (x − c) C(x), donde C(x) es el polinomio cociente, por estar asegurado que el resto de la división es cero (Teorema del resto).

Entonces, encontrando un valor de "c" que anule a P(x) tendremos asegurado que el binomio x – c será un divisor de P(x) y por tanto será posible iniciar la factorización del polinomio.

Factorizar completamente a P(x) implicará establecer la existencia de algún factor de C(x), el cociente de la división anterior. Este procedimiento deberá continuarse hasta que el último cociente hallado, no contenga ningún factor (no exista un valor de "c" que lo anule).

Ejemplo: Factorizar $P(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x$

Solución:

Es evidente que $c_1 = 0$ anula a P(x) por lo tanto el binomio $x - c_1$ = x – 0 = x divide exactamente a P(x), luego se podrá escribir que:

$$P(x) = (x - c_1)C_1(x) = x\,(x^3 + 4x^2 - 4x - 16)$$

Como en este caso el divisor es un monomio, el polinomio cociente se puede hallar dividiendo cada término del polinomio P (x) por x:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16}{x} = \frac{x^4}{x} + \frac{4x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} - \frac{16x}{x}$$

Poder factorizar P(x) completamente implicará averiguar si existe algún factor de $C_1(x)$; como para$c_2 = 2$ $C_1(x)$; se anula, podremos afirmar que el binomio x − c_2= x – 2 permitirá escribir $C_1(x)$ = (x − c_2) $C_2(x)$, donde $C_2(x)$ podrá encontrarse mediante la **regla de Ruffini**.

Luego: P(x) = (x − c_1) $C_1(x)$ = (x − c_1) (x − c_2) $C_2(x)$

$$P(x) = x\ (x^3 + 4x^3 - 4x - 16) = x\ (x\ -\ 2)\ (x^2 + 6\,x + 8)$$

Como $C_2(x)$ = (x^2 + 6 x + 8) se anula para c_3 = −2, el binomio x − c_3 = x + 2 será un factor de $C_2(x)$, por lo tanto se podrá escribir: $C_2(x)$= (x − c_3) $C_3(x)$ y el polinomio P(x) como:

P(x) = (x − c_1) $C_1(x)$ = (x − c_1) (x − c_2) $C_2(x)$ = (x − c_1) (x − c_2) (x − c3) $C_3(x)$

$$P(x) = x(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) = x\ (x\ -\ 2)\ (x^2 + 6x + 8)$$
$$= x(x-2)(x+2)(x+4)$$

De esta manera hemos logrado factorizar por completo al polinomio P(x), utilizando como único recurso la búsqueda de factores.

El polinomio P(x) es de cuarto grado y tiene cuatro raíces reales. En general se cumple:

El **teorema del factor** provee una herramienta para encontrar los diversos factores que posee un polinomio cualquiera, por lo que resulta útil como recurso para factorizar.

Todo polinomio P(x) de grado n que tenga n raíces reales, puede factorizarse como:

P(x) = a_n (x – c_1) (x – c_2) … …… … (x – c_n)

Donde a_n es el coeficiente principal de P(x) y c_1, c_2, ,c_n son las raíces reales de P(x).

Veamos otro *ejemplo*: Factorizar $Q(x)\ =\ x^2\ +\ 4$

Para factorizar el polinomio Q(x) será necesario buscar un valor de c que lo anule; como la suma de x^2 y 4 será siempre positiva se puede afirmar que no existe un número real que anule al polinomio, por lo tanto Q(x) no posee raíces reales; sus dos raíces son complejas: r_1 = 2i y r_2 = - 2i .

El siguiente teorema ayuda a caracterizar las raíces de un polinomio:

Si P(x) es un polinomio de grado n ≥ 1, entonces P(x) = 0 tiene exactamente n raíces, siempre y cuando la multiplicidad k de una raíz se cuente k veces. (Pudiendo ser estas raíces reales o complejas).

Intentar lo siguiente

i) Establecer si existe un factor "x – c" para los siguientes binomios:

a) x^3 + 1b) 1 + x^4 c) 9x^2 – 1

ii) En los casos que sea posible: a) Factorizar los binomios dados en términos del factor hallado. b) Factorizar por completo el binomio dado.

4. APLICACIONES DEL FACTOREO

Simplificación de Expresiones racionales

El cociente de dos polinomios P(x) y Q(x) se denomina expresión racional. Si estos polinomios tienen en común algún factor entonces es posible simplificarlo y escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en forma más sencilla.

Por ejemplo en la expresión $\frac{x^2-5x-6}{x^3+1}$ se tiene que $x=-1$ es raíz del numerador y del denominador. Así ambos podrán ser escritos como producto donde uno de los factores será x- (-1) , es decir x + 1:

$$\frac{x^2-5x-6}{x^3+1}=\frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x-6}{x^2-x+1}$$

El numerador tiene una raíz x = 6 y el denominador tiene raíces complejas conjugadas.

Como no comparten raíces, carecen de factores comunes y no es posible simplificar más la última expresión. Finalmente se obtiene que

$\frac{x^2-5x-6}{x^3+1}=\frac{x-6}{x^2-x+1}$ Para $x \neq -1$

Nota: La condición $x \neq -1$ debe ser considerada porque las expresiones en ambos miembros son equivalentes para cualquier valor de x excepto para x = –1, donde la expresión original no está definida.

Intentar lo siguiente

Simplificar las siguientes expresiones racionales.

a) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-x-2}$ b) $\frac{2x^3-x^2-2x+1}{x^2-1}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

Guía de ejercicios N°2

1. Dados los siguientes polinomios:

$\boldsymbol{P}(x) = 4x^3 + x^2 - 2x - 13$ $\quad \boldsymbol{Q}(x) = 2x^2 + 3x + 9$ $\quad \boldsymbol{R}(x) = -x^3 + 2$

$\boldsymbol{S}(x) = x - 5$ $\quad \boldsymbol{T}(x) = 2x^2$ $\quad \boldsymbol{U}(x) = -2x^5 + x^2 - x$

Encontrar:

a) $-3 \cdot \boldsymbol{Q}(x)$ $\quad \boldsymbol{P}(x) + \boldsymbol{Q}(x)$ $\quad$ c) $\boldsymbol{Q}(x) - \boldsymbol{U}(x)$

d) $\boldsymbol{P}(x) + 4\boldsymbol{R}(x)$ $\quad \boldsymbol{T}(x) \cdot \boldsymbol{Q}(x)$ $\quad$ f) $\boldsymbol{S}(x) \cdot \boldsymbol{R}(x)$

g) $\mathrm{T(x) \cdot R(x) + U(x)}$ $\quad [\boldsymbol{S}(x)]^2$ $\quad$ i) $[\boldsymbol{R}(x)]^2$

2. Dados los siguientes polinomios:

i- Predecir el grado de cada uno de ellos.

ii- Reducirlos a su mínima expresión.

a) $\boldsymbol{P}(x) = 7x - (3 - x) - 2x$

b) $\boldsymbol{P}(x) = (7x + 5) - (2x + 3)$

c) $\boldsymbol{P}(x) = (x + 2).(x - 2)$

d) $\boldsymbol{P}(x) = (3 - 5x).(3 + 5x)$

e) $\boldsymbol{P}(x) = (-2x - 3).(3x + 6)$

f) $\boldsymbol{P}(x) = 2x^2.(2x + 1 - 10x^2)$

g) $\boldsymbol{P}(x) = \left(\sqrt{x} - 10\right).(\sqrt{x} + 10)$

h) $\boldsymbol{P}(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 2x + 1)$

3. Se dan los siguientes polinomios:

$\boldsymbol{P}(x) = x^2 - 6x + 4$ $\quad \boldsymbol{Q}(x) = x - 1$ $\quad \boldsymbol{R}(x) = x^2 + 6x - 4$ $\quad \boldsymbol{Q}(x) = 4 - x^2$

Se pide, obtener mediante operaciones entre los mismos, un polinomio con las características indicadas en cada caso:

a) De dos términos

b) De grado 3.

c) De grado 5.

d) Nulo.

e) Sea un monomio en *"x"* con coeficientes positivos

f) Sea un cuatrinomio de tercer grado.

4. Utilizar el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios, en los casos en los que sea posible, utilizar la regla de Ruffini para hallar cociente y resto:

a) $(8x^4 - 8x^2 + 6x + 6) : (2x^2 - x)$

b) $(-8x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 17x + 9) : (2x^2 + 3x + 1)$

c) $(5x + 2x^3 - 3) : (x + 2)$

d) $(x^3 - x^2 + 7) : (x - 1)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

e) $(x^3+9x^2-3x-1):(2x-1)$

i- Verifique cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto:

$$\boldsymbol{P}(x)=\boldsymbol{Q}(x)\cdot\boldsymbol{C}(x)+\boldsymbol{R}(x)$$

ii- Escribir el resultado de las divisiones dadas teniendo en cuenta que:

$$\frac{\boldsymbol{P}(x)}{\boldsymbol{Q}(x)}=\boldsymbol{C}(x)+\frac{\boldsymbol{R}(x)}{\boldsymbol{Q}(x)}$$

5. Completar el factor que hace falta para que se cumplan las igualdades:

a) $2x^3+8x=$ ______(x^2+4)

b) $3ax^2-a^2x=(3x-a)$______

c) ______$(-5x^2+4x)=-15x^2+12x$

d) $\left(\frac{3}{4}-x^2\right)$______ $=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^4$

6. Factorear el polinomio $\boldsymbol{P}(x)$ extrayendo como factor común el indicado en cada caso:

$$\boldsymbol{P}(x)=4x^5+2x^2-10x^6+20x^3$$

a) $\frac{1}{2}x$ b) $4x^2$ c) $5x^4$

7. Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^4+x^3+3x-1):(x-2)$

b) $(x^5-32):(x-2)$

c) $(-2x^4+x^2+4):(x+3)$

d) $\left(\frac{1}{8}-x^3\right):(x-\frac{1}{2})$

e) $(x^4-3x^3+7x^2-2x+1):(x+2)$

f) $(x^3-4x-1):(x+0{,}5)$

i- Utilizar el teorema del resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

ii- Cuando sea posible, factorearlo en termino del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

8. Teniendo en cuenta que: "un polinomio $\boldsymbol{P}(x)$ tiene un factor $x-c$, si y sólo si $\boldsymbol{P}(c)=0$" (Teorema del factor).

i-Establecer si el binomio dado $x-c$ es un factor del polinomio $\boldsymbol{P}(x)$. Si lo es, factorice$\boldsymbol{P}(x)$.

a) $\boldsymbol{P}(x)=x^3+6x^2+11x+6$ $\quad x+1$

b) $\boldsymbol{P}(x)=x^3+5x^2-2x-24$ $\quad x-3$

c) $\boldsymbol{P}(x)=-x^3+7x+6$ $\quad x+2$

d) $\boldsymbol{P}(x)=x^3-6x^2+11x-6$ $\quad x-1$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

ii- Establecer si existe un factor $x-c$ para los siguientes binomios. En caso afirmativo, factorizar los binomios dados en termino del factor encontrado.

a) x^2+4
b) x^2-4
c) x^2-1
d) $\frac{1}{8}-x^3$
e) $2+x^3$
f) x^5-32
g) x^2-5
h) $16x^2-9$
i) $2-x^3$

9. Para cada polinomio de segundo grado, encontrar los factores $x-c$.

a) $\boldsymbol{P}(x)=-x^2+2x+6$
b) $\boldsymbol{P}(x)=\frac{1}{2}x^2$
c) $\boldsymbol{P}(x)=2x^2-2x-4$
d) $\boldsymbol{P}(x)=-x^2+1$
e) $\boldsymbol{P}(x)=x^2+4x+4$
f) $\boldsymbol{P}(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$

i- Factorear los polinomios dados en termino de uno de los factores encontrados.

ii-Escribir los polinomios dados como producto de sus factores.

iii-Dar la expresión general de la forma factoreada del polinomio de segundo grado.

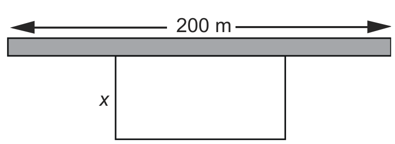
Simplificar las siguientes expresiones racionales:

a) $\frac{x^2}{x^2+2x}$
b) $\frac{n^2-1}{n^3-n^2+n-1}$
c) $\frac{3x^2+x-10}{5x-3x^2}$
d) $\frac{x^2-5x}{5-x}$
e) $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}$

a) $\frac{9y^2+12y^8-15y^6}{3y^3}$
b) $\frac{2x-4}{x^3+5x^2-2x-24}$
c) $\frac{3x^2+3x-6}{2x^2+6x+4}$
d) $\frac{8-x^3}{x^2-2x}$
e) $\frac{-6a^3+9a^6-12a^9}{-2a^3}$

g) $\frac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}$
h) $\frac{2x^3+x^2-3x+1}{2x-1}$
i) $\frac{n-1}{n^2-1}$

10. Con 200 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared:



a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?

b) Construye la función que nos da el área del recinto.

11. Sea $P_{(x)}=ax^2+6x-4$

a) ¿Cuál debe ser el valor de "a" para que "(x – (½))" sea factor de $P_{(x)}$?

b) Para a = - 2, grafique $P_{(x)}$ a partir de las raíces y el vértice.

12. Si en una división de polinomios la Regla de Ruffini dio:

	1	-2	0	-1	1
2		2	0	0	-2
	1	0	0	-1	-1

a) ¿Es exacta la división?. ¿Porqué?

b) Escriba el polinomio dividendo.

c) ¿El divisor es “ –x + 2” ?

d) Use el algoritmo de la división y compare resultados.

UNIDAD 3: ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS

1. ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Ecuaciones de Primer Grado con una incógnita

Se dice que una ecuación es **entera** cuando las incógnitas esta sometidas únicamente a las operaciones de suma, resta y multiplicación.

Definición

Una ecuación entera con una incógnita se dice de primer grado o lineal, cuando el mayor grado con que figura la incógnita es el primero.

Una proposición como $3(x + 3) = x + 5$ es un ejemplo de una **ecuación de primer grado o ecuación lineal**, porque la variable x sólo aparece elevada a la primera potencia. También se dice que es una **ecuación condicional**; es cierta para ciertas sustituciones de la variable x, pero no para otras. Por ejemplo, es verdadera cuando $x = -2$, pero es falsa para $x = 1$. Por otro lado, una ecuación como $3(x + 2) = 3x + 6$ se llama **identidad** porque es verdadera o válida para todos los números reales x.

Resolver una ecuación quiere decir determinar los números reales "x" para los cuales la ecuación dada es verdadera. Dichos números reales se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación dada.

Resolvamos la ecuación $3(x + 3) = x + 5$. La estrategia es reunir todos los términos donde aparezca la variable, de un lado de la ecuación, y las constantes del otro.

El primer paso es eliminar el paréntesis aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

$3(x + 3) = x + 5$

$3x + 9 = x + 5$

$3x + 9 + (-9) = x + 5 + (-9)$ Sumando (-9) a cada lado de la ecuación

$3x = x - 4$

$3x + (-x) = x - 4 + (-x)$ Sumando $(-x)$ a la ecuación

$2x = -4$

$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}(-4)$ Multiplicando a cada lado por $\frac{1}{2}$

$x = -2$

Para verificar que $x = -2$ es la solución de la ecuación, se reemplaza $x = -2$ en la ecuación original:

$3\,[(-2) + 3] = (-2) + 5 \quad \rightarrow \quad 3 = 3$

No se debe decir que (-2) es una solución hasta que no se haya comprobado.

En la solución anterior hemos empleado las dos propiedades básicas de la igualdad.

Propiedad de igualdad en la suma

Para todos los números reales, a, b y c, si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

Propiedad de igualdad en la multiplicación

Para todos los números reales, a, b y c, si $a = b$ entonces $ac = bc$.

La importancia de estas dos propiedades reside en que producen **ecuaciones equivalentes**, ecuaciones que tienen las mismas raíces. Así, la propiedad de la suma convierte a la ecuación $2x - 3 = 7$ en la forma equivalente $2x = 10$.

Regla

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se suprimen los paréntesis en caso que los haya. Se trasponen los términos de modo que todos los que contienen a la incógnita queden en el primer miembro y los independientes en el segundo; se reducen los términos en cada miembro, y, en caso que la incógnita quede afectada por un coeficiente, se pasa éste al segundo miembro. Efectuando las operaciones, queda determinada la solución. Si al despejar la incógnita resulta precedida por el signo menos, se multiplican ambos miembros de la ecuación por (-1).

Intentar lo siguiente

Resolver las siguientes ecuaciones enteras de primer grado:

a) $x + 3 = 9$ b) $2x + 5 = x + 11$ c) $3\,(x - 1) = 2x + 7$

d) $5x - 3 = 3x + 1$ d) $2\,(x + 2) = x - 5$ e) $4\,(x + 2) = 3\,(x - 1)$

Ecuaciones Racionales de Primer Grado

Se dice que una ecuación es racional cuando por lo menos una de las incógnitas figura en el denominador.

Ejemplo 1: Resolver $\frac{3}{1-x} = 4$

Solución: 3 = 4 (1 – x) Sabiendo que x ≠ 1, se multiplica ambos miembros por (1 – x)

3 = 4 – 4x Utilizando la propiedad distributiva del producto respecto a la resta

4x – 4 = −3 Multiplicando ambos miembros por −1 y ordenándolos

4x = 4 – 3 Sumando 4 a cada lado de la ecuación

$x = \frac{1}{4}$ Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{4}$

Luego, 1/4 es raíz de la ecuación dada. En efecto, al sustituir ese valor en la ecuación dada, esta se satisface.

Ejemplo 2: Resolver $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{1+x}{x}$

Recordando que $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9^2$ (diferencia de cuadrados)

$\frac{x(x+3)-2(x-3)}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$ Sumando fracciones con distinto denominador.

$$\frac{x^2 + 3x - 2x + 6}{x^2 - 9} = \frac{1 + x}{x}$$

$\frac{x^2+x+6}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$ Sabiendo que x ≠ 0, x ≠ 3 y x ≠ -3, se multiplica ambos miembros por

“x” y por “x^2 – 9”.

$x(x^2 + x + 6) = (x^2 - 9)(1 + x)$ Aplicando propiedad distributiva del producto respecto a la suma algebraica.

$x^3 + x^2 + 6x = x^2 - 9x - 9 + x^3$ Reduciendo términos semejantes

$6x + 9x = -9$ Sumando 9x a ambos miembros de la ecuación

$15x = -9$ Multiplicando ambos miembros por 1/15

$$x = -\frac{3}{5}$$

La ecuación $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{1+x}{x}$ tiene por conjunto solución S = $\{-\frac{3}{5}\}$

Regla

Para resolver una ecuación racional con una incógnita se reducen las fracciones de cada miembro al mínimo común denominador; mediante simplificaciones y pasaje de denominadores se transforma en una ecuación entera. Resuelta ésta, es necesario probar si las raíces halladas satisfacen a la ecuación racional propuesta.

Cuando se resuelven ecuaciones racionales puede suceder que la supresión de los denominadores que contienen a la incógnita haga aparecer raíces extrañas, es decir, números que satisfacen a la ecuación transformada, pero que no satisfacen a la ecuación dada. Por consiguiente, cuando se resuelve una ecuación racional, es necesario verificar siempre la raíz hallada.

Intentar lo siguiente

Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x-3}{x+3} = \frac{4}{5}$ b) $\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2$ c) $\frac{4x}{x^2-4} = \frac{2x}{x+2} - 2$

Exploremos ahora la solución de problemas. Lo que haremos es traducir el enunciado de un problema al lenguaje matemático adecuado, y desarrollar una ecuación que podamos resolver.

2. Aplicación a la Resolución de Problemas

Reglas para Resolver Problemas

1. Lea el problema. Haga una lista de la información disponible.

2. ¿Qué es lo que se debe determinar? Introduzca una variable y defina lo que representa. En caso de ser posible trace una figura o use una tabla si es necesario.

3. Formule una ecuación.

4. Resuelva la ecuación.

5. ¿Parece razonable la respuesta? ¿Ha contestado usted la pregunta que aparece en el problema?

6. Compruebe su respuesta con la ecuación en el problema original.

7. Describa la solución del problema.

Problema 1: La longitud de la base de un rectángulo es 1 cm menos que el doble de su altura. El perímetro es 28 cm. Determine las dimensiones del rectángulo.

Solución

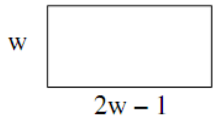
1. *Vuelva a leer el problema y trate de imaginar la situación que se describe. Tome nota de toda la información que se da en el problema.*

La longitud de la base es uno menos que el doble de la longitud de la altura.

El perímetro es 28.

2. *Determine qué es lo que se pide contestar. Introduzca una variable adecuada, que normalmente representa la cantidad que se debe determinar. Cuando sea apropiado, haga una figura.*

Representando la longitud de la altura con w. Entonces, 2w – 1 representa la longitud de la base.



3. *Con la información disponible, forme una ecuación donde intervenga la variable.*

El perímetro es la distancia que se recorre alrededor del rectángulo. Esto proporciona la información necesaria para escribir la ecuación.

$$w + (2w - 1) + w + (2w - 1) = 28$$

4. *Resuelva la ecuación.*

$$w + (2w - 1) + w + (2w - 1) = 28$$

$$w + 2w - 1 + w + 2w - 1 = 28$$

$$6w - 2 = 28$$

$$6w = 30$$

$$w = 5$$

5. *Regrese al problema original para ver si la respuesta obtenida tiene sentido. ¿Parece ser una solución razonable? ¿Quedo contestado lo que pregunta el problema?*

El problema original preguntaba las dos dimensiones. Si la longitud de la altura, w, es 5 cm., entonces la longitud de la base, 2w – 1, debe ser 9 cm.

6. *Compruebe la solución por sustitución directa de la respuesta en el enunciado original del problema.*

Como comprobación, vemos que la longitud de la base del rectángulo, 9 cm., es 1 cm menos que el doble de la altura, 5 cm., tal como lo dice el problema. También, el perímetro es 28 cm.

7. *Por último, describa la solución en términos de las unidades correctas*.

Las dimensiones son: 5 cm. por 9 cm.

Problema 2: Un automóvil sale de cierta población a mediodía, y se dirige hacia el este a 40 kilómetros por hora. A las 13 horas otro automóvil sale de la población, viaja en la misma dirección a una velocidad de 50 kilómetros por hora. ¿Cuántas horas tarda el segundo vehículo en rebasar al primero?

Solución: Con frecuencia, los problemas de movimiento de este tipo parecen difíciles, cosa que no debería ser. La relación básica que debemos recordar es que **la velocidad multiplicada por el tiempo es igual a la distancia** ($r \times t = d$). Por ejemplo, un automóvil viajando a una velocidad de 60 kilómetros por hora, durante 5 horas, recorre $60 \times 5 = 300$ kilómetros.

Necesitamos volver a leer el problema y ver qué parte de la información que ahí aparece puede ayudar a formar una ecuación. Los dos automóviles viajan a distintas velocidades y durante distintos tiempos, pero ambos viajarán la misma distancia desde el punto de partida hasta que se encuentran. La pista es la siguiente: *Representar la distancia que viaja cada uno e igualar estas cantidades.*

Usaremos la x para representar la cantidad de horas que tardará el segundo automóvil en rebasar al primero. Entonces éste, que ha comenzado una hora antes, viaja $x + 1$ horas hasta el punto de encuentro. Es útil resumir esta información en forma de tabla.

	Velocidad	**Tiempo**	**Distancia**
Primer automóvil	40	$x + 1$	$40\,(x + 1)$
Segundo automóvil	50	x	$50x$

Al igualar las distancias llegamos a una ecuación de la que se puede despejar x:

$$50x = 40\,(x + 1) \quad \rightarrow \quad 50x = 40x + 40 \quad \rightarrow \quad 10x = 40 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

El segundo automóvil rebalsa al primero en 4 horas. Esta respuesta, ¿parece razonable?

Comprobamos el resultado. El primer automóvil viaja 5 horas a 40 kilómetros por hora, lo que hace un total de 200 kilómetros. El segundo, viaja 4 horas a 50 kilómetros por hora, y se obtiene el mismo total de 200 kilómetros.

Respuesta: El segundo vehículo tarda 4 horas en rebasar al primero.

3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Las ecuaciones que tienen más de una incógnita se satisfacen para diferentes sistemas de valores atribuidos a sus letras. Así la ecuación 2x + y = 7 se satisface para infinitos pares de valores atribuidos a "x" y a "y", por ejemplo para:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ etcétera.

Estas soluciones se pueden escribir como pares ordenados, así:

(1, 5) ; (2, 3) ; (4, −1) ; etc.

Cada uno de los pares de valores que satisface a una ecuación con dos incógnitas constituye una solución de esa ecuación.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación de primer grado con dos incógnitas.

$$3x - y = 2y + 15$$

$3x - y - 2y = 15$	Sumando $-2x$ a cada lado de la ecuación
$3x - 3y = 15$	Reduciendo
$3(x - y) = 15$	Sacando factor común
$x - y = 15/3$	Multiplicando ambos miembros por 1/3
$x - y = 5$	

Luego "x" e "y" serán los infinitos pares de números que cumplen la condición de que su diferencia sea 5. Entre ellos:

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 19/3 \\ y = 4/3 \end{cases}$ etcétera.

Como pares ordenados: (8, 3); (3, −2); (−4, −9); (19/3, 4/3); etc.

Cada uno de estos pares de valores es por lo tanto una ecuación, como puede comprobarse al reemplazar en ella "x" e "y", respectivamente, por las componentes de cada uno de esos pares.

Toda ecuación de primer grado con dos o más incógnitas admite infinitas soluciones.

Esta conclusión se expresa también diciendo que la ecuación es ***indeterminada***.

Si escribimos en forma genérica una ecuación de primer grado con dos incógnitas, obtenemos

$$a\,x + b\,y = c$$

donde a, b, y c son números reales que se llaman, respectivamente: coeficiente de x; coeficiente de y, y término independiente. Si se despeja la y se obtiene **una función lineal**.

En nuestro ejemplo; $3x - y = 2y + 15$, si despejamos la variable y, se obtiene:

$y = x - 5$ representa la ecuación explícita de una recta.

Representación Gráfica de un Polinomio tipo: $a_1x + a_0$

> **Teorema**
>
> La gráfica de un polinomio de grado menor o igual a uno, es una recta.

Dado que dos puntos determinan una línea, podemos representar gráficamente al polinomio de grado uno encontrando dos puntos que pertenezcan a su gráfica. Después, trazamos una línea que pase por dichos puntos.

Para mayor seguridad, siempre se debe utilizar un tercer punto como control. A menudo, los puntos más fáciles de encontrar son aquellos en los que la gráfica corta los ejes.

> **Definición**
>
> La **ordenada al origen** (intersección eje y) de una gráfica es la ordenada del punto en el que la gráfica corta al eje y. La **abscisa al origen** (intersección eje x) es la abscisa del punto en el que la gráfica corta al eje x.

Para encontrar la ordenada al origen, se hace x = 0 y se resuelve para y. Para encontrar la abscisa al origen, se hace y = 0 y se resuelve para x.

Ejemplo 1:

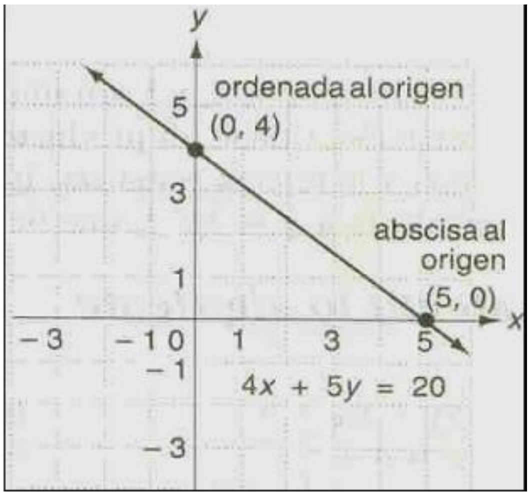
Representar gráficamente $4\,x + 5\,y = 20$

Solución. Primero se hallan las intersecciones.

$x = 0 \rightarrow y = 4$ (ordenada al origen) representa el punto (0, 4)

$y = 0 \rightarrow x = 5$ (abscisa al origen) representa el punto (5, 0).

Podemos usar por ejemplo el punto



Intentar lo siguiente

Representar gráficamente: a) $2x - 6y = -2$ b) $3y = 2x - 6$

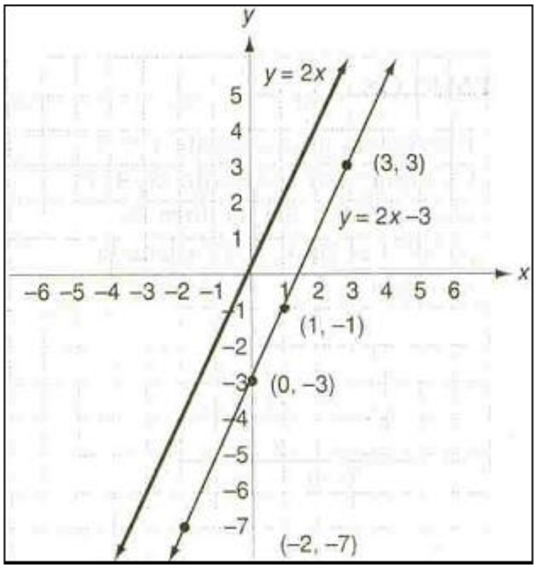
Rectas Paralelas

La gráfica de $y = mx$ es una línea recta que pasa por el origen. ¿Qué sucede si sumamos un número b al miembro derecho de la ecuación para obtener $y = mx + b$.

Ejemplo 2: Representar gráficamente $y = 2x - 3$ y comparar con la gráfica de $y = 2x$.

Primero construimos una tabla de valores, luego representamos gráficamente y comparamos.

x	y (o $2x - 3$)
0	−3
1	−1
3	3
−2	−7



La gráfica de $y = 2x - 3$ es una línea recta desplazada 3 unidades hacia abajo a partir de la gráfica de $y = 2x$.

Teorema

La gráfica de una ecuación de la forma $y = mx$ es una línea recta que pasa por el origen.

La gráfica de $y = mx + b$ es una línea paralela a $y = mx$ que tiene como ordenada al origen al número b.

Intentar lo siguiente

Representar gráficamente y comparar con la gráfica de $y = 2x$.

a) $y = 2x + 1$ b) $y = 2x - 4$

Rectas Perpendiculares

Si dos rectas se intersecan en ángulos rectos, son perpendiculares.

Teorema

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

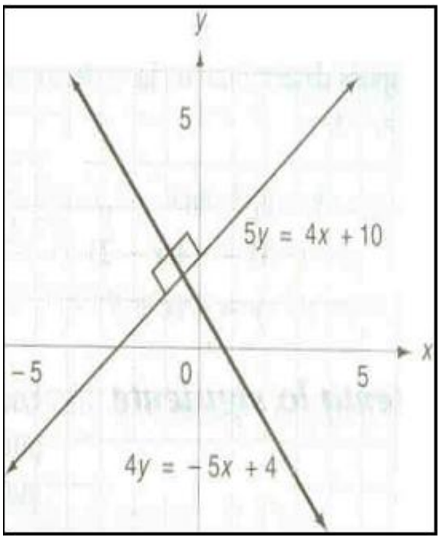
Ejemplo: Determinar si las gráficas de $5y = 4x + 10$ y $4y = -5x + 4$ son perpendiculares.

Solución. Primero encontramos la forma pendiente – ordenada al origen resolviendo para y.

$$y = \frac{4}{5}x + 2yy = -\frac{5}{4}x + 1$$

El producto de las pendientes es -1; es decir, $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -1$

Las rectas son perpendiculares.



Intentar lo siguiente

Determinar si las gráficas de los siguientes pares de ecuaciones son perpendiculares:

a) $2y - x = 2$ y $y + 2x = 4$ b) $3y = 2x + 15$ y $2y = 3x + 10$

Determinación de la Pendiente de una Recta

Si observamos el grafico vemos una recta sobre la que hemos marcado dos puntos. A medida que vamos de P_1 a P_2, el cambio en x es $x_2 - x_1$. Análogamente, el cambio en y es $y_2 - y_1$.

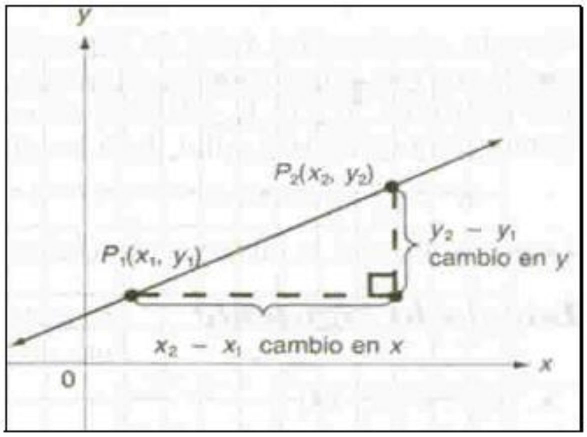
La razón de cambio en y dividido por el cambio en x se llama **pendiente de la recta**.

Es común utilizar la letra m para designar pendientes.

Definición

La pendiente m de una recta es el cambio en y dividido por el cambio en x, dicho en forma matemática: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta, y $x_2 \neq x_1$.



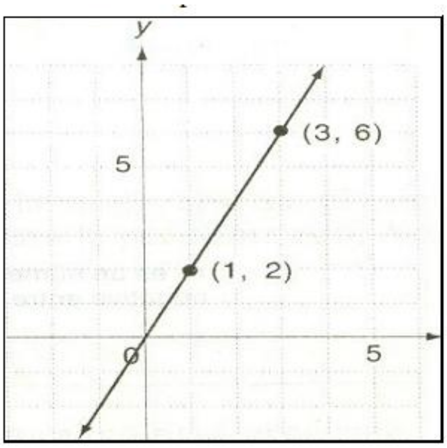
Para hallar la pendiente de una recta, se utiliza las coordenadas de dos puntos cualesquiera para determinar el cambio en y así como el cambio en x. Después se divide el cambio en y por el cambio en x.

Ejemplo: Los puntos (1, 2) y (3, 6) están en una recta. Encontrar su pendiente.

Solución.

$$m = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$



Si utilizamos los puntos (1, 2) y (3, 6) en sentido inverso, encontramos que el cambio en y es negativo y el cambio en x es negativo. Obtenemos el mismo número para la pendiente.

$$m = \frac{2-6}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Cuando calculamos el valor de la pendiente, el orden de los puntos no importa en la medida en que calculemos las diferencias en el mismo orden.

Los puntos (0, 0) y (−1, −2) también se encuentran sobre la recta. Si utilizamos estos puntos para calcular el valor de la pendiente, obtenemos lo siguiente:

$$m = \frac{-2-0}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

La pendiente será la misma, independiente del par de puntos que utilicemos. Vemos que esta recta asciende de izquierda a derecha y tiene pendiente positiva. Si una recta desciende de izquierda a derecha tendrá pendiente negativa.

Intentar lo siguiente

Calcular la pendiente de la recta que contiene a cada par de puntos.

a) (1, 1) y (12, 14) b) (3, 9) y (4, 10) c) (0, −4) y (5, 7) d) (7, 2) y (6, 3)

4. SISTEMA DE ECUACIONES

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen las mismas variables se llama sistema de ecuaciones. El conjunto solución de un sistema con dos incógnitas se compone de todos los pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema.

Sabemos que dos rectas no paralelas cualesquiera en un plano se cortan exactamente en un punto. Para determinar las coordenadas de dicho punto se plantean las ecuaciones de ambas rectas. A continuación, por ejemplo, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, y sus gráficas trazadas en el mismo sistema de coordenadas.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

La gráfica muestra el conjunto solución del sistema. Su intersección es el par ordenado (1, 2).

Esto se comprueba mediante una sustitución.

x – y = -1

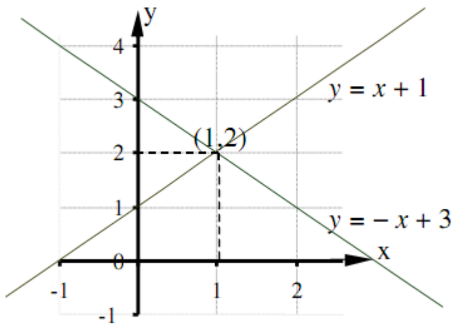
1 – 2 = -1

-1 = -1

x + y = 3

1 + 2 = 3

3 = 3



Puesto que las coordenadas del punto (1, 2) verifican ambas ecuaciones, (1,2) es la solución.

Si un sistema sólo tiene una solución, se dice que es la **única** solución.

Solución de Sistemas de Ecuaciones

Es posible que la representación gráfica no sea un método eficaz y preciso para resolver un sistema de ecuaciones de dos variables. Ahora consideraremos otros métodos más eficientes.

Método de Sustitución

Pasos:

1. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema.

2. Se sustituye en la otra ecuación dicha incógnita por la expresión obtenida. De ahí el nombre de método de sustitución.

3. Se resuelve la ecuación con una incógnita, que así resulta.

4. Esta incógnita se reemplaza por el valor obtenido, en la expresión que resultó de despejar la primera y se calcula así el valor de está.

Ejemplo 1: Utilizando el método de sustitución, resolver el siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$$

Solución. Comenzamos diciendo que (x , y) son las coordenadas del punto de intersección de este sistema. Los valores de “x” (abscisa) e “y” (ordenada), satisfacen ambas ecuaciones.

Por consiguiente, de cualquiera de las ecuaciones se puede despejar "x" o "y", luego sustituir lo obtenido en la otra.

PRIMER PASO: Despejemos y de la primera ecuación, pues el coeficiente del término correspondiente es 1:

$y = 6 - 2x$

SEGUNDO PASO: Así "y" y "6 – 2x" son equivalentes. Podemos reemplazar "y" por "6 – 2x" en la segunda ecuación.

$3x + 4y = 4$

$3x + 4(6 - 2x) = 4$ Sustituyendo "6 – 2x" en vez de "y"

TERCER PASO: Esto da una ecuación de una variable. Ahora podemos resolver para "x".

$3x + 24 - 8x = 4$ Utilizando la propiedad distributiva del producto respecto a la resta

$-5x = -20$

$x = 4$

CUARTO PASO: Se sustituye 4 en vez de "x" en cualquiera de las ecuaciones y se resuelve para "y".

$2x + y = 6$ Escogiendo la primera ecuación

$2 \cdot 4 + y = 6$

$y = -2$

El resultado es el par ordenado (4, −2). Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la solución del sistema.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de sustitución para resolver los siguientes sistemas. Construya los gráficos correspondientes.

a) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3y - 2x = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Método de Igualación

Pasos:

1. Se despeja una de las incógnitas en las dos ecuaciones.

2. Se igualan las expresiones obtenidas. De ahí el nombre de método de igualación.

3. Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.

4. Se reemplaza el valor obtenido de esta última incógnita en cualquiera de las dos expresiones que resultaron al despejar la primera, y se obtiene así su valor.

Ejemplo 1: Utilizando el método de igualación, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 10 & [1] \\ 2x + \frac{5}{4}y = 1 & [2] \end{cases}$$

PRIMER PASO: Al aplicar este método, también conviene observar cuál es la incógnita que se despeja más fácilmente en las dos ecuaciones; en este caso es x.

De [1] $\quad x = 10 - 3y \quad$ [3]

De [2] $\quad 2x = 1 - \frac{5}{4}y \quad \to \quad x = \frac{1-\frac{5}{4}y}{2} \quad$ [4]

SEGUNDO PASO: Se igualan los segundos miembros de [3] y [4]

$$10 - 3y = \frac{1 - \frac{5}{4}y}{2}$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en y que se acaba de obtener.

$(10 - 3y)2 = 1 - \frac{5}{4}y \quad \to \quad 20 - 6y = 1 - \frac{5}{4}y$

$-6y + \frac{5}{4}y = 1 - 20 \quad \to \quad -\frac{19}{4}y = -19$

$-y = \frac{(-19)4}{19} \quad \to \quad y = 4$

CUARTO PASO: Se sustituye "y" por su valor, 4, en la expresión [3] o en la [4]. En este ejemplo es más cómodo en la [3].

$$x = 10 - 3 \cdot 4 \to x = -2$$

El resultado es el par ordenado $(-2, 4)$. Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la solución del sistema.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de igualación para resolver los siguientes sistemas. Construya los gráficos correspondientes.

a) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3y - 2x = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Método de Reducción por Suma o Resta

En este método se trata de obtener una ecuación con una sola variable, o eliminar una de las variables, por esto también se lo conoce como método de eliminación.

Pasos

1. Se multiplican las ecuaciones por un número conveniente, para igualar el valor absoluto de los coeficientes de una misma incógnitas, en las dos ecuaciones.

2. Según que dichos coeficientes resulten de igual o distinto signo, se restan o se suman las ecuaciones, con lo que se consigue eliminar dicha incógnita. De ahí el nombre de método de eliminación o reducción.

3. Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.

4. Se reemplaza está por su valor en una de las ecuaciones dadas y se obtiene el valor de la primera incógnita o bien se calcula esta incógnita por el mismo método.

Ejemplo 1: Utilizando el método de reducción o eliminación, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{5}{3}y = 5 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

PRIMER PASO: Al aplicar el método conviene observar para cuál de las dos incógnitas se pueden igualar con más facilidad los valores absolutos de sus coeficientes.

En este caso es la “x”. Es inmediato que multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 se igualan los coeficientes de “x”.

$$\begin{cases} 6x - 5y = 15 \\ 6x - 8y = 6 \end{cases}$$

SEGUNDO PASO: Como los coeficientes de "x" son iguales en valor absoluto y signo, se restan miembro a miembro las ecuaciones para eliminar los términos en x.

$$-5y - (-8y) = 15 - 6$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en "y" que se acaba de obtener.

$$-5y + 8y = 9 \quad \rightarrow \quad 3y = 9 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

CUARTO PASO: Se reemplaza el valor de $y = 3$, en una de las ecuaciones del sistema dado; en este caso es más cómodo en la segunda.

$$3x - 4 \cdot 3 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x - 12 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x = 15$$

$$x = 5$$

Luego, el conjunto solución es: $S = \{(5, 3)\}$

Ejemplo 2: Resolver el siguiente sistema por el método de eliminación

$$\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 3x - 2y = -20 \end{cases}$$

PRIMER PASO: Se observa en este ejemplo, que basta multiplicar la segunda ecuación por 3 para igualar el valor absoluto de los coeficientes de "y"; el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 9x - 6y = -60 \end{cases}$$

SEGUNDO PASO: Como los coeficientes de y tienen signos contrarios, se suman miembro estas ecuaciones para eliminar y.

$$5x + 9x = 32 - 60$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en x.

$$14x = -28 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

CUARTO PASO: Para calcular y se puede reemplazar este valor $x = -2$ en una ecuación del sistema o bien eliminar la x, multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 5.

$$\begin{cases} 15x + 18y = 96 \\ 15x - 10y = -100 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro

$$18y - (-10y) = 96 - (-100) \quad \rightarrow \quad 28y = 196 \quad \rightarrow \quad y = 7$$

Luego la solución del sistema es: S = {(–2, 7)}

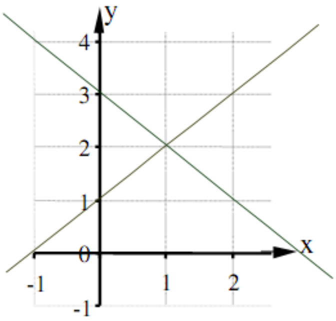
Intentar lo siguiente

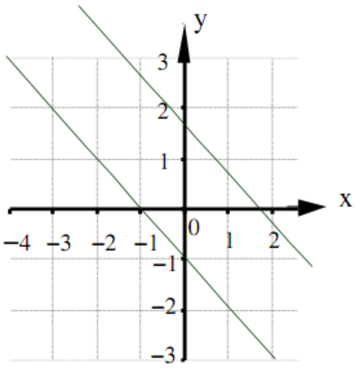
Utilizar el método de eliminación para resolver los siguientes sistemas.

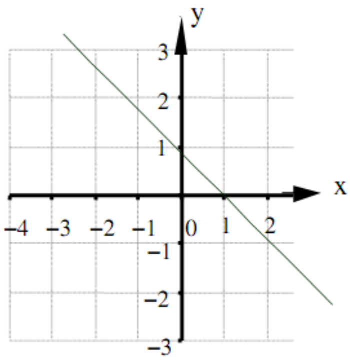
a) $\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ 2x + 7 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + y = 5{,}75 \end{cases}$

Interpretación Geométrica de las Distintas Soluciones

Las gráficas de dos ecuaciones lineales pueden ser dos rectas que se intersecan. También pueden ser dos rectas paralelas o una misma recta.







Dos rectas que se intersecan. Solución única.

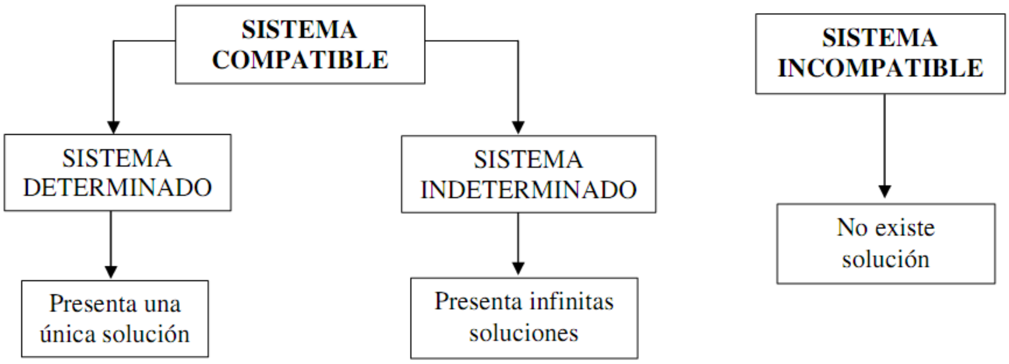
Rectas paralelas. No hay solución.

Una misma recta. Infinitas soluciones.

Sistemas Compatibles y Sistemas Incompatibles

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, es encontrar él o los valores que satisfacen simultáneamente las ecuaciones. Es decir al reemplazar los valores hallados, convierte cada ecuación en una afirmación verdadera. Si no se puede hallar esos valores, significa que no existe ningún valor que lo satisfaga, el sistema se dice que es incompatible o inconsistente. Si el sistema presenta solución se dice que es compatible o consistente.

Mediante un diagrama presentaremos las distintas situaciones que pueden existir:



Si un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución, decimos que es **compatible** o **consistente**. Si un sistema no tiene solución, decimos que es **incompatible** o **inconsistente**.

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es compatible o incompatible.

$$\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ -2x + 6y = 5 & [2] \end{cases}$$

Intentamos encontrar una solución. Multiplicamos [1] por 2 y sumamos el resultado a [2] (método de eliminación)

$$\begin{cases} 2x - 6y = 2 & 2.[1] \\ -2x + 6y = 5 & [2] \end{cases}$$

De donde se obtiene:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ 0 = 7 & 2.[1] + [2] \end{cases}$$

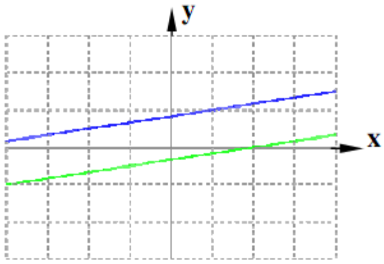
La última ecuación dice que $0\,x + 0\,y = 7$. No hay valores que puedan asumir las variables para los que esto sea cierto, de modo que no hay solución. El sistema es **inconsistente**.

Podemos considerar el problema gráficamente. Las formas **pendiente – ordenada al origen** de las ecuaciones originales son:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \qquad [1]$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \qquad [2]$$

Podemos ver que las rectas son paralelas. Las pendientes son iguales y las ordenadas al origen son distintas. No tienen punto de intersección, de modo que el sistema es inconsistente Si al resolver un sistema de ecuaciones llegamos a una ecuación que es a todas luces falsa, tal como 0 = 7, entonces el sistema es inconsistente.



Intentar lo siguiente

Determinar si los siguientes sistemas son consistentes o inconsistentes.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

Sistemas Compatibles Indeterminados

Sistemas Compatibles Indeterminados o Dependientes

Si un sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones, decimos que el sistema es indeterminado o dependiente.

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & [1] \\ 4x + 6y = 2 & [2] \end{cases}$$

Si multiplicamos a [1] por −2 y sumamos el resultado a [2] obtenemos

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & [1] \\ 0 = 0 & -2\,.[1] + [2] \end{cases}$$

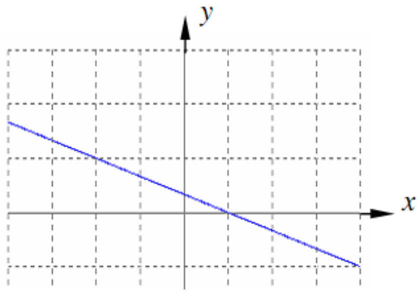
La última ecuación dice que $0\ x\ +\ 0\,y\ =\ 0$. Esto es verdad para todos los valores que puedan asumir las variables. El sistema es indeterminado.

También podemos considerar el problema gráficamente. La forma pendiente – ordenada al origen de las ecuaciones son

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \qquad [1]$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \qquad [2]$$

Las ecuaciones en la forma pendiente – ordenada al origen de las rectas son iguales. Esto significa que las gráficas son la misma. Este sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones. Cada punto de la recta con ecuación $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ tiene coordenadas que constituyen una solución. El sistema es **indeterminado**.



Intentar lo siguiente

Determinar si los siguientes sistemas son indeterminados.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

Guía de ejercicios n°3

ECUACIONES LINEALES

1. Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones. Compruebe las soluciones:

   a) 2,5x+0,5x=1,5x+1,5

   b) 15y− (3− (4y + 4) − 57)=2−y

   c) (6x + 2) · (5x − 4) − 30(x − 1) = 34x + 106

   d) $6x^2$ - 27x + 72 = 3x (2x + 3)

   e) 5(x –7) + 7(x + 7) = 42

   f) (2x –5)(3x –7) – (3x –5)(2x –7) + 30 = 5x

   g) $\frac{1}{2}(4x+6)=\frac{1}{5}(15x+20)$

   h) $\frac{4x-6}{12}-\frac{3x-8}{4}=\frac{2x-9}{6}-\frac{x-4}{8}$

   i) $1-x^2-\frac{3x+1}{2}=-\frac{x^2}{4}+5x-\frac{3x^2}{4}$

   j) $\frac{8}{5}x-\frac{3}{2}x+\frac{5x^2-3}{10}=\frac{2x^2-1}{4}$

2. Resolver e indicar para cada ecuación si es: compatible (determinada o indeterminada) o incompatible:

   a) $(s+1)(3s+1)=3s^2+7s-13$

   b)$(x-3)^2+6x-24=(x+3)^2-6x-24$

   c) $\frac{t+3}{2}-4+\frac{1}{2}(t-1)=(2-t)^2-7-t^2$

   d) $\frac{x-3}{2}-\frac{1}{4}(2x+3)-x=(1+x)-\frac{5}{4}$

   e)$3x-2=3x+2$

3. Analizar que ocurre cuando:

   a) k = − 8/ 5, 4 (3x) + 5 kx = 3 k +1 + 4x;

   b) k = 4/3, 3kx – x – 3x = k – 6

4. Resolver las siguientes ecuaciones racionales.

   a) $\frac{4}{x^2-9}.\frac{x^2+6x+9}{x+3}=2$

   b) $\frac{5x}{(2x+5)^2}+\frac{3x-2}{4x^2-25}=0$

c) $\frac{24}{x^2-16}+\frac{5}{x+4}=\frac{3}{x-4}$

d) $\frac{x^2}{x^2+2x}=3$

e) $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}=x+1$

f) $\frac{3x}{x+7}-\frac{8}{5}=0$

g) $\frac{2x-5}{x+1}-\frac{3}{x^2+x}=0$

5. Se propone a continuación una serie de problemas cuyas condiciones pueden formularse en términos de ecuaciones lineales:
   a) Hallar un número sabiendo que da igual resultado si se le suma 5 que si se lo multiplica por 5.
   b) ¿De qué número ha de restarse 6/5 para que la diferencia sea igual a su quinta parte?
   c) Si a un número se lo multiplica por 3, al producto se le suma 5 y a la suma se la divide por 2, da igual que si se lo multiplica por 5, al producto se le sumara 4 y a la suma se la dividiera por 3. ¿Cuál es ese número?
   d) Un padre tiene 30 años y su hijo 2 años. ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el padre tenga 8 veces la edad del hijo?
   e) Una persona gasta 1/3 de su dinero y luego 2/5 de lo que le queda; tiene aún $60. ¿Cuánto tenía al principio?
   f) La quinta parte de un número más 4 es igual a 1/3 menos el duplo de dicho número. ¿Cuál es el número?
   g) Encontrar dos números pares consecutivos tales que dos veces el primero más tres veces el segundo sea 76.
   h) Si a un número se le suma su tercera parte y a este resultado se le resta el mismo número aumentado en 5, se obtiene 1. ¿Cuál es dicho número?
   i) La mitad de un número, más la tercera parte de su consecutivo, más la octava parte de siguiente, es igual a este número. ¿Cuáles son los números?
   j) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuyo perímetro es 10 cm mayor que el de un rectángulo de largo igual al lado del cuadrado y de ancho igual a 4 cm?
   k) Las ruedas delanteras y las traseras de un cierto vehículo tienen 0,8m y 1,1 m de diámetro respectivamente. Calcular la distancia recorrida si las ruedas delanteras dieron 450 vueltas más que las traseras.

l) Una habitación es 3 veces más larga que ancha y tiene un perímetro de 96 m. ¿Cuáles serán sus medidas?

m) El precio de un artículo se aumentó en un quinto y resultó entonces el 0,75 de $160. ¿Cuál era su precio inicial?

n) El precio de un ventilador se rebaja un 20%. El ventilador se vende entonces a $480., o sea, un 20% más que el precio de coste, ¿cuál es el precio de venta sin rebaja y el precio de coste?

o) ñ) Si el 50% de x, más el 10% de x es el 12,5% de 480, calcular x.

p) Un rectángulo es 2 metros más ancho que un cierto cuadrado, 6 metros más largo que él y tiene un área 84 m^2 mayor que la de dicho cuadrado. Hallar las dimensiones de las dos figuras.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

6. Resolver, clasificar y graficar, los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - 0{,}5y = 0 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3y - 4x - 1 = 0 \\ 3x = -4y + 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 5 = 4x - 6y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x\sqrt{3} - 3y = \sqrt{3} \\ x + y\sqrt{3} = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 10 - 2x \\ 8x - 2 = 2y \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{5}x - 5y = \sqrt{5} \\ x - \sqrt{5}y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y - 1 = 2 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 3x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$

7. Determinar que en los casos siguientes se cortan las dos rectas dadas y hallar el punto de intersección:

a) x + 5y – 35 = 0, 3x + 2y –27 = 0

b) 3x + 5 = 0, y – 2 = 0

8. Demostrar que en los casos siguientes son paralelas las dos rectas dadas:

a) 2x – 4y + 3 = 0, x – 2y = 0

b) 2x –1 = 0, x + 3 = 0

c) y + 3 = 0, 5y –7 = 0

9. Demostrar que en los casos siguientes coinciden las dos rectas dadas:

a) 3x + 5y – 4 = 0, 6x + 10y – 8 = 0

b) $x - \sqrt{2}y = 0, \qquad \sqrt{2}x - 2y = 0$

c) $\sqrt{3}x - 1 = 0, \qquad 3x - \sqrt{3} = 0$

10. Encontrar la ecuación de una recta que pasa por (3, –4) y tiene pendiente –2. Si la recta contiene a los puntos (a, 8) y (5, b); encuentre a y b.
11. Determinar para que valores de α y β las dos rectas:

$$\alpha x - 2y - 1 = 0 \; ; \; 6x - 4y - \beta = 0$$

a) tienen solución única

b) tienen infinitas soluciones

c) no tienen solución.

d) en cada caso, escriba el conjunto solución.

12. Se da el sistema: $\begin{cases} 2x + ay = 13 \\ x - y = -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de "a" la solución es (2, 3)?

b) ¿Para qué valor de "a" el sistema no tiene solución?

c) ¿Para qué valores de "a" el sistema tiene infinitas soluciones?

13. a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto de intersección de las rectas 2x– y +1= 0; 3x + 2y = 0 y tiene pendiente 2. b) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el mismo punto.
14. Resolver los siguientes problemas:
    a) La suma de dos números es – 42. El primero de ellos menos el segundo es 52. ¿Cuáles son los números?

    Rta.: x =5 ; y = − 47

    b) b) La diferencia entre dos números es 16. Tres veces el mayor de ellos es nueve veces el más pequeño. ¿Cuáles son los números?

    Rta.: x =24 ; y = 8

    c) La suma de dos números naturales es 98 y al dividir el mayor por el menor el cociente es 7 y el resto 10. ¿Cuáles son los números?

    d) d) Cuando pagaste una cuota de $120 del viaje de estudios utilizaste 15 billetes de $ 5 y $10. ¿Cuántos billetes de cada denominación entregaste? Rta.: 6 billetes de $5; 9billetes de $10

e) e) A una reunión asistieron 200 personas entre hombres y mujeres, habiendo pagado los hombres \$40 por cada entrada y las mujeres \$20. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres habían si en total recaudaron \$5860?

f) f) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°. Si el menor de los ángulos mide la mitad del mayor y 14° grados menos que el intermedio. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?

g) g) Un hotel de dos pisos tiene 54 habitaciones. Si las del primero duplican en número a las del segundo, ¿cuántas habitaciones tiene cada uno?

h) h) Juan y Carlos son profesores. En total llevan 46 años dando clases. Hace dos años, Juan llevaba 2,5 veces los años que tenía Carlos como profesor. ¿Cuántos años llevan en la enseñanza cada uno de ellos?

Rta.: 32 y 14

i) El dígito de las decenas de un entero positivo de dos dígitos es 2 más que tres veces el dígito de las unidades. Si los dígitos se intercambia, el nuevo número es 13 menos que la mitad del número dado. Averigua el entero dado.(Sugerencia: sea x = dígito de las decenas e y = dígito de las unidades, entonces 10x + y es el número)

Rta.: 82

j) El perímetro de un rectángulo es 86cm. El largo es 19 cm más grande que el ancho. Calcular el largo y el ancho.

Rta.: l =31 , a = 12

UNIDAD 4: TRIGONOMETRÍA

La Trigonometría es una parte de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Estas son de mucha utilidad para resolver problemas en diversas ramas de esta ciencia o de otras, como la física, la química, la astronomía, etc.

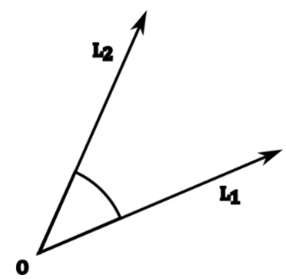
La trigonometría (etimológicamente "medición de ángulos") fue inventada por los astrónomos griegos para calcular los elementos de un triángulo (sus ángulos y lados).

1. Sistemas de Medición de Ángulos

Para la medición de ángulos se tienen en cuenta diversos "sistemas". Para comenzar, es necesario realizar una revisión del concepto de ángulo.

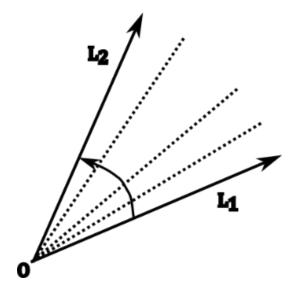
Definición 1

Ángulo es una parte del plano limitada por dos semirrectas (lados del ángulo), que tienen un origen en común, denominado vértice (O).



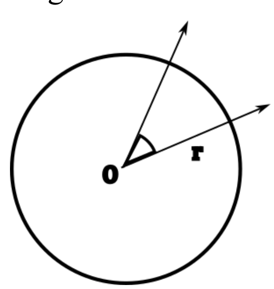
Definición 2:

Dadas dos semirrectas L_1 y L_2, con origen común, **ángulo** es la porción del plano generada por el "barrido" (giro) de L_1 hasta coincidir con L_2.



Así pueden darse dos posibilidades: cuando se gira en sentido contrario al de las agujas del reloj (antihorario) se considera "ángulo positivo" y cuando se gira a favor de las agujas del reloj (horario) se considera "ángulo negativo".

En particular, si el origen de las semirrectas coincide con el centro de un círculo (de radio r), las semirrectas determinan un "ángulo central" del círculo.



La **medida**, o **medición** de un ángulo consiste en asociar a todo ángulo del plano un número que caracteriza su abertura (la parte del plano comprendida en el interior del ángulo), también denominada amplitud. Para medir un ángulo se pueden utilizar unidades de distintos sistemas de medición.

El Sistema Sexagesimal

Este sistema tiene como unidad de medida al Grado Sexagesimal. Se utiliza el símbolo “ ° ” para indicar la unidad.

Definición:

Un grado sexagesimal es la medida del ángulo con vértice en el centro de un círculo (ángulo central), de amplitud igual a la 360ava parte del mismo.

¿Cuántos grados sexagesimales mide:

(a) un ángulo llano?

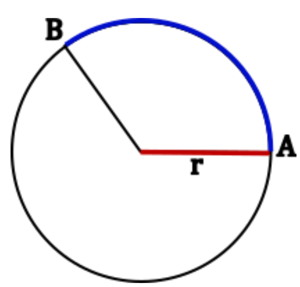
(b) un ángulo recto?

(c) un ángulo de giro?

Si se divide un grado en 60 partes se obtiene un minuto (‘) y si se divide un minuto en 60 partes se obtiene un segundo (‘’). Más allá, se utilizan divisiones decimales del segundo (0,1’’; 0,01’’; etc.).

El Sistema Circular

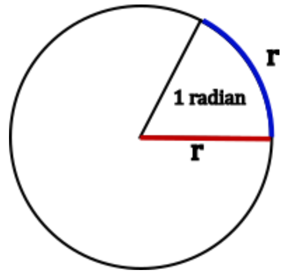
En este sistema la unidad de medida es el radián. Si se considera una circunferencia de radio r y centro O, y se genera un ángulo central α por la rotación de la semirrecta OX, se obtiene sobre la circunferencia un arco AB de longitud L. Al efectuar la razón entre la longitud (L) del arco determinado y el radio de longitud r, se obtiene un valor adimensional L/r que es la medida del ángulo en radianes. Es decir:



$$\frac{\widehat{AB}}{r} = \alpha$$

Definición:

Un radián es la medida del ángulo con vértice en el centro de un círculo de radio r, cuyos lados determinan sobre la circunferencia un arco AB de longitud igual al radio.



Equivalencia entre el Sistema Sexagesimal y el Circular

Se puede establecer una equivalencia entre estos sistemas, considerando el cociente (en radianes) entre la longitud de una semicircunferencia de perímetro πr y el radio r. Este sector circular corresponde a un ángulo llano que mide 180º (sexagesimales), por lo que se obtiene la relación:

$$\pi \text{ radianes} = 180°$$

En general, si $\alpha°$ es un ángulo en el sistema sexagesimal y α_r es un ángulo en radianes, se tienen las siguientes expresiones:

$$\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot \alpha_r$$

$$\alpha_r = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha°$$

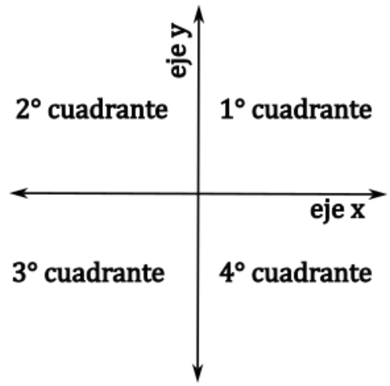
Una milla marítima se define como la longitud del arco subtendido en la superficie de la Tierra por un ángulo que mide 1 minuto. El diámetro de la Tierra es aproximadamente 7.927 millas terrestres. Determinar la cantidad de millas terrestres que hay en una milla marítima.

Intentar lo siguiente

1. Calcular en radianes los siguientes ángulos particulares: 0°, 45°, 90°, 270° y 360°.
2. ¿Cuántos grados mide un ángulo de 1 radián?
3. ¿Cuántos radianes mide un ángulo de 1 grado?
4. Si se toma a π como 3,14 ¿qué valor en radianes se obtiene?

Sistema cartesiano

Los ejes coordenados (generalmente denominados “eje x” o eje de abscisas y el “eje y” o eje de ordenadas) dividen al plano en cuatro sectores llamados cuadrantes.



Entonces, como un ángulo no cambia respecto de su posición en el plano y con el único motivo de facilitar definiciones, propiedades y cálculos, es conveniente referirlo a un sistema de coordenadas cartesianas.

Un ángulo se encuentra en posición normal si su vértice se ubica en el origen de coordenadas O y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas. De esta forma al primer cuadrante le corresponden ángulos desde 0º hasta 90º (tomados en sentido antihorario), el segundo cuadrante desde 90º hasta 180º, el tercer cuadrante desde 180º hasta 270º y el cuarto cuadrante desde 270º hasta 360º.

Al seguir girando en ese sentido se obtienen ángulos mayores a 360º; por ejemplo, un ángulo de 1125º serán 3 giros y 1/4 y estará en el primer cuadrante, un ángulo de -120º tendrá sentido horario y estará en el tercer cuadrante.

¿Son Verdaderas o Falsas estas proposiciones?

1. Un ángulo de 300º está en el cuarto cuadrante.
2. Un ángulo de 120º está en el primer cuadrante
3. Un ángulo de 1500º está en el cuarto cuadrante

2. Razones trigonométricas de un ángulo

Sea un triángulo rectángulo ABC (con el ángulo recto en B).

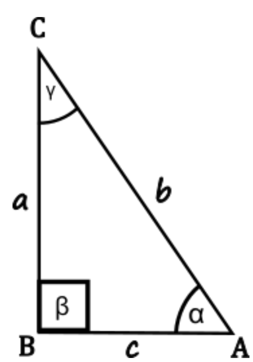
Las medidas de sus lados son a, b y c.

Sus ángulos interiores son α, γ y el ángulo recto β.

El lado a se denomina **cateto opuesto** al ángulo α.

El lado c se denomina **cateto adyacente** al ángulo α.

El lado b se denomina **hipotenusa** del triángulo.



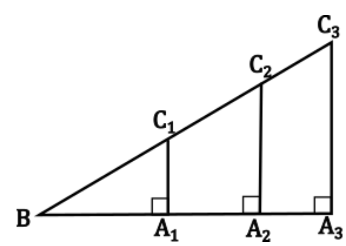
Se pueden encontrar las razones entre los catetos y la hipotenusa respecto a un determinado ángulo, (por ejemplo, α). Los valores que se obtienen son números reales que dependerán del valor del ángulo. Estas razones se conocen como relaciones trigonométricas y son seis:

seno del ángulo α: es el cociente entre el **cateto opuesto** a α y la **hipotenusa**.	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{b}$
coseno del ángulo α: es el cociente entre el **cateto adyacente** a α y la **hipotenusa**.	$\cos\alpha = \frac{c}{b}$
tangente del ángulo α: es el cociente entre el **cateto opuesto** a α y el **cateto adyacente** a α	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c}$
cotangente del ángulo α: es el cociente entre el **cateto adyacente** a α y el **cateto opuesto** a α	$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{c}{a}$
secante del ángulo α: es el cociente entre la **hipotenusa** y el **cateto adyacente** a α.	$\sec\alpha = \frac{b}{c}$
cosecante del ángulo α: es el cociente entre la **hipotenusa** y el **cateto opuesto** a α.	$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$

Las tres primeras se denominan relaciones trigonométricas directas. Las tres últimas son las relaciones trigonométricas recíprocas de las anteriores. O sea, en símbolos se puede escribir:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Si se tienen tres triángulos rectángulos semejantes (como en la figura), rectángulos en A y B = 30º, con $BA_1 = 3\ cm$, $BA_2 = 5\ cm$ y $BA_3 = 8\ cm$, respectivamente. ¿Qué se puede decir de los cocientes CA/BC en los tres casos?



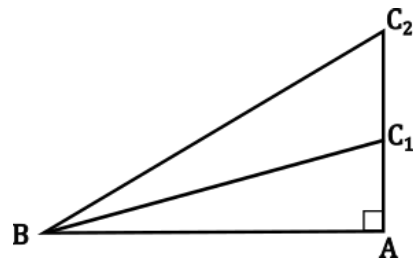
Los cocientes $\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$ corresponden a la longitud del cateto opuesto al ángulo B dividido la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo, con lo que se estaría calculando el seno del ángulo B. Como se ve, los cocientes son iguales, o sea:

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \operatorname{sen}30° = \frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{C_3A_3}}{\overline{BC_3}} = 0{,}5$$

Este valor 0,5 representa la constante de proporcionalidad que se da cuando se efectúa las razones $\frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$.

Esto se repite si se calculan las demás razones trigonométricas mencionadas anteriormente.

Si se tienen dos triángulos rectángulos (como en la figura), rectángulos en A, con $B_1 = 30°$ y $B_2 = 45°$, ¿Qué se puede decir de los cocientes $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ en los dos casos?



En el primer caso, se ha calculado sen $30° = \frac{1}{2}$, y en el segundo caso sen $45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Conclusiones

Los valores de las razones trigonométricas **dependen** del valor del ángulo considerado. Para un mismo ángulo, las razones trigonométricas **se mantienen**, independientemente de la longitud de los lados del triángulo.

Valores de seno y coseno para algunos ángulos más utilizados, del primer cuadrante.

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg					

Intentar lo siguiente

1) Completar la tabla anterior con la tangente de los ángulos dados, utilizando para ello la última relación obtenida.

2) Utilizar la calculadora científica para calcular seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

0º; 32º; 45º; 16º 35'; 60º; 260º 22' 54"; 300º.

3) Utilizar la calculadora científica para calcular seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

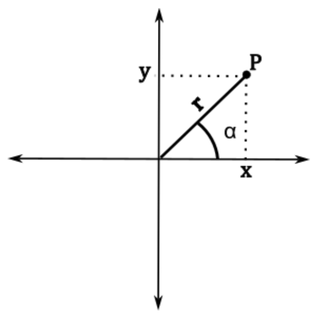
2 rad; 5,5 rad; 1,2 rad; 2π rad; 3/2π rad; 5/6π rad.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

4) Obtener (con calculadora) las relaciones trigonométricas recíprocas, para los ángulos del ítem 2.

3. Signo de las Relaciones Trigonométricas

En los cálculos realizados en el ítem 2 del ejercicio anterior, algunos de los valores obtenidos tienen signo positivo y otros son negativos.



Sea α un ángulo de posición normal y $P(x; y)$ un punto sobre el lado terminal del ángulo. Según en qué cuadrante se ubique el punto P, sus coordenadas irán tomando el signo positivo o negativo que corresponda, por lo tanto, se debe tener en cuenta los signos de x y de r (con $r \in \mathbb{R}^{+}$), para determinar los signos de seno, coseno, tangente y sus valores recíprocos.

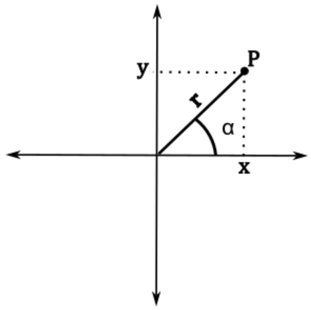
Intentar lo siguiente

Completar la tabla con los signos que correspondan:

	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
1° Cuadrante						
2° Cuadrante						
3° Cuadrante						
4° Cuadrante						

4. Relación fundamental de la trigonometría

Sea α un ángulo cualquiera en un sistema de ejes cartesianos y sea $P(x; y)$ un punto sobre el lado terminal del ángulo. Por definición:



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Dividiendo por r^2:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

Reemplazando:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

5. Relaciones trigonométricas inversas

Si se conoce el valor de la relación trigonométrica ¿es posible conocer el valor del ángulo correspondiente? O sea, si se sabe que $\sin\alpha = 0{,}5$ entonces ¿cuánto vale α?

La respuesta es afirmativa: se utilizan las relaciones inversas. Cada relación trigonométrica tiene su inversa. En el ejemplo: $\alpha = \text{arc sen } 0{,}5$. Si se hace la pregunta ¿cuál es el ángulo cuyo seno es 0,5? La respuesta es 30°. Entonces: $\text{arc sen } 0{,}5 = 30°$.

En general:

$$\text{Si sen } \alpha = \text{A, entonces } \alpha = \text{arcsen A}$$
$$\text{Si cos } \alpha = \text{B, entonces } \alpha = \text{arcos B}$$
$$\text{Si tg } \alpha = \text{C, entonces } \alpha = \text{arctg C}$$

En la calculadora o en algunos textos se utiliza el símbolo: $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\text{A}$.

Ejemplo: Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arc sen}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Intentar lo siguiente

Hallar:

1) $\text{arc cos}\,(-0{,}8)$

2) $\text{arctg } 2$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

3) arc sec 4

6. Resolución de triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos tienen muchas aplicaciones, en parte porque son muchas las situaciones en el mundo real que los comprenden. Antes de resolver algunos problemas, debemos recordar que:

a) los ángulos interiores y los lados de un triángulo reciben el nombre de **elementos fundamentales** del mismo, y

b) un triángulo queda determinado en sus dimensiones si y sólo si se conocen **tres** de sus elementos fundamentales, siendo por lo menos, uno de ellos un lado.

Si el triángulo es rectángulo, como ya conocemos uno de sus elementos fundamentales (el ángulo recto), bastarán dos elementos fundamentales más, que pueden ser:

- la hipotenusa y un ángulo agudo,
- un cateto y un ángulo agudo,
- los dos catetos, y
- la hipotenusa y un cateto.

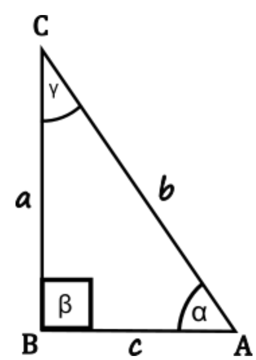
Son éstos, los cuatro casos que se estudian en la resolución de triángulos rectángulos.

Recordemos también:

a) que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios ($\alpha + \gamma = 90°$),

b) el Teorema de Pitágoras ($a^2 + c^2 = b^2$), y

c) que el área de un triángulo rectángulo es $S = \frac{b \cdot c}{2}$



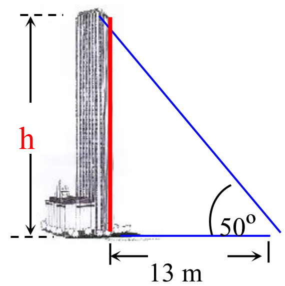
Por otra parte, debemos tener presente que, para calcular una incógnita de un problema, mientras sea posible debemos calcularla utilizando los datos del problema. Al proceder así, evitaremos lo que se denomina "arrastre del error", ya que un error en el cálculo de una incógnita, utilizada para calcular otra, se trasmite a esta otra.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

Ejemplos resueltos

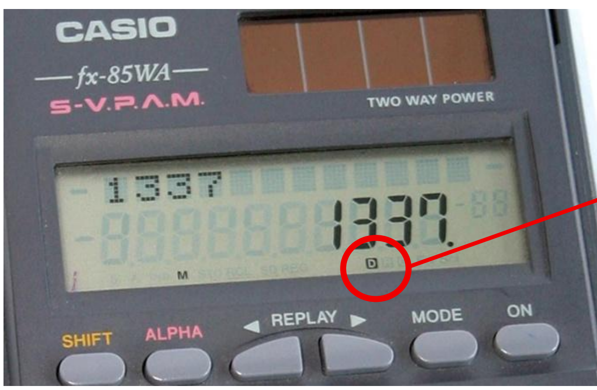
Problema resuelto N°1: Calcular la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50º con el suelo.

Solución: en primer lugar, tenemos que comprender el problema. Para ello haremos un esquema de la situación e identificamos los datos y las cantidades desconocidas:



Datos: s = 13m; θ=50º **Incógnita**: h

Antes de comenzar a resolver el problema, debemos verificar que la calculadora científica esté en el modo D. Para eso debe aparecer una letra D pequeña en alguna parte de la pantalla. En la figura adjunta se muestra una imagen en un tipo de calculadora científica (no es el objetivo hacerle publicidad a la misma, pero suele ser la más frecuente en nuestro entorno). Si no aparece esta letra D presione la tecla MODE y elige el modo que corresponde a la D.



La letra D indica que la calculadora está en el modo adecuado para trabajar con ángulos expresados en grados sexagesimales.

Ahora sí, enfoquémonos en el problema. En él se conoce la longitud de la sombra (que está dibujada sobre el piso) y el ángulo que forman los rayos de sol con el piso. Nos piden determinar la altura *h* de la torre. Es decir, conocemos un ángulo y el cateto adyacente[1] a ese ángulo, la altura de la torre es desconocida y corresponde a la medida del cateto opuesto del ángulo. Debemos usar una razón trigonométrica que relacione el cateto opuesto y el cateto adyacente con el ángulo. Esta razón es la tangente:

$$\tan\theta = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} \Rightarrow \tan\theta = \frac{h}{s}$$

[1] Recordar que adyacente significa que está pegado, o sea el cateto pegado al ángulo. Opuesto significa que se le opone, o sea enfrentado al ángulo.

Despejamos h, para eso, multiplicamos ambos miembros de la ecuación por s:

$$h = s.\tan\theta \Rightarrow h = 13m \cdot \tan 50°$$

Calculamos la tangente de un ángulo de 50°. Para ello presionamos la tecla tan y luego el número 50.

$$h = 15{,}49\ m$$

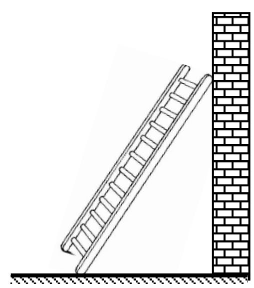
Rta: la torre tiene una altura igual a 15,49 m.

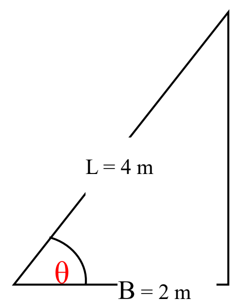
Problema resuelto N° 2: Una escalera de 4 m está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su inclinación si su base dista 2 m de la pared?

Solución: como con el problema 1, hacemos un esquema de la situación e identificamos los datos y las cantidades desconocidas:

Datos: L=4m; B= 2m

Incógnita: θ





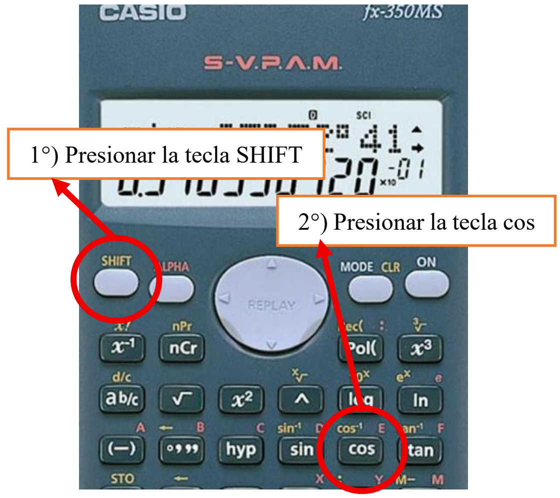
En esta actividad se conoce el largo (L) de la escalera (hipotenusa) y la distancia desde la escalera a la pared (B=base, que corresponde a la medida del cateto adyacente al ángulo desconocido). Se solicita determinar el ángulo que forma la escalera con el piso. Para resolverlo debemos buscar la razón trigonométrica que relaciona el ángulo con el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$cos\,\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \Rightarrow cos\,\theta = \frac{B}{L}$$

Sustituimos los datos: $cos\,\theta = \frac{2m}{4m} \Rightarrow cos\,\theta = 0{,}5$

Es decir, el coseno del ángulo vale 0,5. Debemos averiguar a qué ángulo corresponde. Para ello debemos usar la función inversa del coseno: la función arcocoseno (abreviada arccos).

En la calculadora esto está indicado como $\cos^{-1}$(aparece en letras amarillas sobre la tecla cos). Para activar esta función debemos presionar la tecla SHIFT, luego se presiona cos y se introduce el número 0,5.

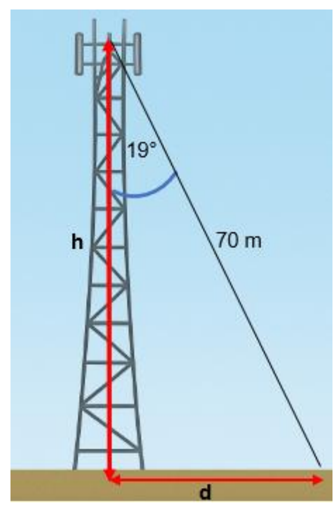


$$\theta = arccos(0,5)$$

$$\theta = 60°$$

Rta: la escalera forma un ángulo de 60º con el piso.

Ejemplo resuelto N° 3: Una empresa de telecomunicaciones instala una antena de teléfono en una zona rural. Para asegurarla, coloca un cable tensor que va desde la punta de la antena hasta un punto en el suelo. El cable mide 79 m**,** y el punto de anclaje está a una distancia d de la base de la antena. El cable forma un ángulo de 19° con la vertical. Calcular la altura de la antena y la distancia d a la que se fija el cable al suelo.



Solución: El lado conocido es la hipotenusa. La altura de la antena es el cateto adyacente al ángulo conocido. Por lo tanto, se puede usar el coseno:

$$\cos 19° = \frac{\mathrm{h}}{70\ \mathrm{m}}$$

Resolvemos la ecuación para "h":

$$\cos 19° = \frac{\mathrm{h}}{70\ \mathrm{m}} \Longrightarrow \mathrm{h} = 70\ \mathrm{m} \cdot \cos 19° = 70\ \mathrm{m} \cdot 0.9455 \Longrightarrow \mathrm{a} \cong 66{,}19\ \mathrm{m}$$

La distancia d a la que se fija el cable al suelo es el cateto opuesto al ángulo conocido. Por lo tanto, se puede usar el seno:

$$\mathrm{sen}\ 19° = \frac{\mathrm{d}}{70\ \mathrm{m}}$$

Resolvemos la ecuación para "d":

$$\mathrm{sen}\ 19° = \frac{\mathrm{d}}{70\ \mathrm{m}} \Longrightarrow \mathrm{d} = 70\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{sen}\ 19° = 70\ \mathrm{m} \cdot 0.3255 \Longrightarrow \mathrm{a} \cong 22{,}79\ \mathrm{m}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

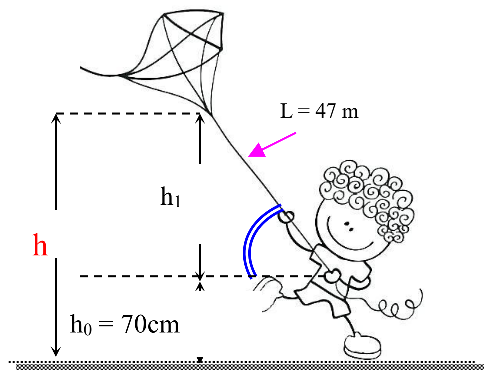
Cuando resolvemos un triángulo, encontramos las medidas de sus lados y sus ángulos hasta entonces desconocidas. En ocasiones abreviamos esto diciendo que “encontramos los ángulos” o “encontramos los lados”.

Ejemplo resuelto N° 4: Jaime está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya 47 m de hilo y el ángulo que forma la cuerda de la cometa con la horizontal es de 52º. Suponiendo que sujeta el extremo del hilo a 70 cm del suelo, calcular la altura h con respecto al suelo a la que está el barrilete.

Solución: hacemos un esquema de la situación e identificamos los datos y las cantidades desconocidas:

Datos: L= 47 m; θ = 52º; h_0=70 cm = 0,7 m

Incógnita: h



Primero hay que notar que la altura a la que vuela el barrilete se calculará sumando la distancia que hay desde el suelo hasta la mano del niño (h_o) más la distancia desde la mano del niño hasta el barrilete (h_1). Como h_o es conocida, se debe calcular h_1. Esta cantidad desconocida corresponde al cateto opuesto del ángulo de 52°. La longitud del hilo corresponde al valor de la hipotenusa. Debemos utilizar la razón seno que es la que relaciona el ángulo con la hipotenusa y el cateto opuesto.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{h_1}{L}$$

Tenemos que despejar h_1. Para eso multiplicamos ambos miembros de la ecuación por L.

$$h_1 = L.\text{sen}\theta \Rightarrow h_1 = 47\ m \cdot \text{sen}52\ ^o \Rightarrow h_1 = 37{,}04\ m$$

$$h = h_0 + h_1 \Rightarrow h = 0{,}70\ m + 37{,}04\ m\ \Rightarrow h = 37{,}74\ m$$

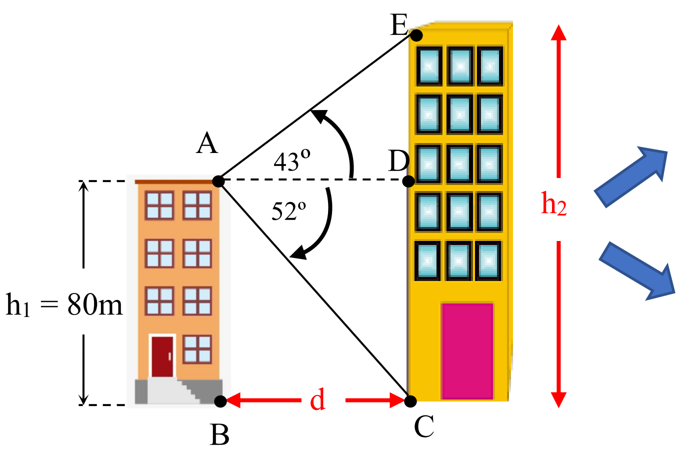
Rta: la altura de la cometa con respecto al suelo es igual a 37,74 m

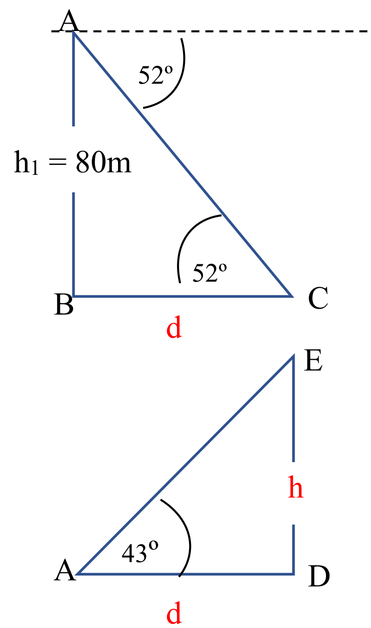
Ejemplo resuelto N° 5: Desde la azotea de un edificio de 80 m de altura, el ángulo de depresión hacia la base de otro edificio ubicado al frente de éste es de 52º y el ángulo de elevación hasta la parte superior del mismo es de 43º. (**a**) ¿Cuál es la distancia que separa los edificios? y (**b**) ¿Cuál es la altura del edificio del frente?

Solución: antes de empezar, vamos a hacer un esquema para representar gráficamente la situación y algunas aclaraciones para comprender el problema. Si un observador está viendo un objeto, entonces la línea del ojo del observador hacia el objeto se conoce como línea de visión. Si el objeto que está observando está por encima de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se conoce como ángulo de elevación. En este problema el ángulo de elevación es igual a 43º y se genera en sentido antihorario. En cambio, si el objeto está por debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se conoce como ángulo de depresión y se genera en sentido horario. En el ejemplo el ángulo de depresión es igual a 52º. Luego, identificamos los datos y las incógnitas.

Datos: $h_1 = 80$ m; $\alpha = 43º$; $\beta = 52º$ **Incógnitas**: d ; h_2

Para calcular la distancia que separa los edificios, observamos el triángulo ABC. En él conocemos el cateto opuesto al ángulo de 52° y desconocemos la medida del cateto adyacente.





Usamos la razón trigonométrica tangente:

$$\tan 52^{o} = \frac{h_1}{d}$$

De esta ecuación tenemos que despejar d:

$$d = \frac{h_1}{\tan 52°} \Rightarrow d = \frac{80m}{\tan 52°} \Rightarrow d = 62{,}50\ m$$

Ya sabemos que la distancia entre ambos edificios es de 62,50 m. Procedemos a encontrar la altura del otro edificio. Para ello, observemos el triángulo ADE, de altura h y base d. Notemos que $h = h_2 - h_1$ es el cateto opuesto y d (ya calculada antes) es el cateto adyacente. Nuevamente usamos tangente:

$$\tan 43° = \frac{h_2 - h_1}{d}$$

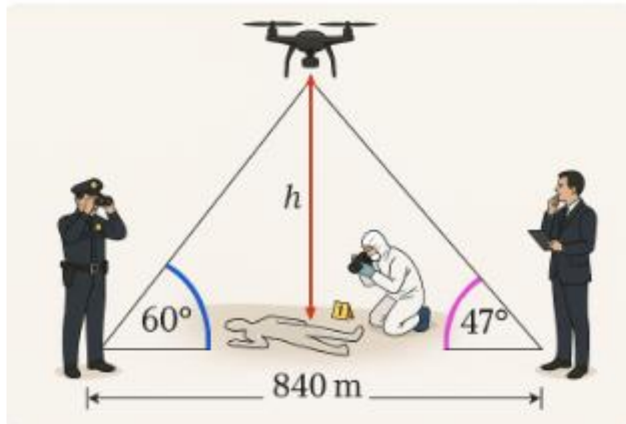
En esta ecuación se desconoce h_2, resolvemos la ecuación para h_2

$$h_2 - h_1 = d \cdot \tan 43° \Rightarrow h_2 = h_1 + d \cdot \tan 43°$$

$$h_2 = 138{,}28\ m$$

Rta: a) Los edificios están separados 62,50 m, b) la altura del edificio de enfrente es 138,28 m.

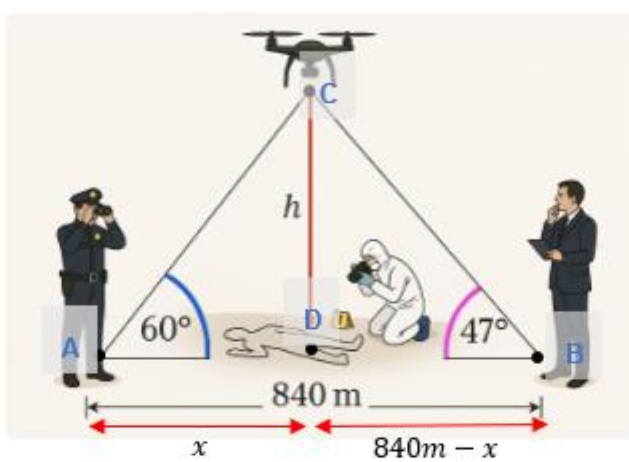
Ejemplo resuelto N° 6: Durante una operación de vigilancia aérea en una escena del crimen ubicada en un terreno amplio, un dron especializado de la policía fue desplegado para capturar imágenes desde una altura fija. Dos peritos forenses, ubicados en puntos diferentes sobre el terreno y separados 840 metros entre sí, observan el dron al mismo tiempo desde sus posiciones. Uno de ellos mide un ángulo de elevación de 60° respecto al horizonte, mientras que el otro mide un ángulo de elevación de 47°.Determinar la altura a la que se encuentra el dron en ese instante.



Solución: identificamos los datos y las incógnitas del problema.

Datos: $\hat{A} = 60°; \hat{B} = 47°; \overline{AB} = 840\ m$ **Incógnita:** h

Para este problema vamos a trabajar con los triángulos ACD y BCD, que tienen en común la incógnita h (que es el cateto opuesto al ángulo de 60° en ACD y es el cateto opuesto al ángulo de 47° en BCD). Llamemos x a la medida del cateto adyacente en el triángulo ACD (longitud del segmento AD), entonces, el cateto adyacente al ángulo de 47° en el triángulo BCD será $840\ m\ - x$ (longitud del segmento BD). Observar que la longitud del segmento AB es igual a la longitud del segmento AD más la longitud del segmento BD.



En ambos triángulos usaremos la razón trigonométrica tangente:

En el triángulo ACD:

$$\tan 60° = \frac{h}{x}$$

En el triángulo BCD:

$$\tan 47° = \frac{h}{840\ m - x}$$

Obtuvimos dos ecuaciones, con dos incógnitas, es decir un sistema de dos por dos. Podemos usar el método de igualación. En tal caso, en ambas ecuaciones despejamos h:

$$x \cdot \tan 60° = h$$

$$(840\ m - x) \cdot \tan 47° = h$$

E igualamos, resolvemos para encontrar x:

$$x \cdot \tan 60° = (840\ m - x) \cdot \tan 47°$$

$$x \cdot \tan 60° = 840\ m \cdot \tan 47° - x \cdot \tan 47°$$

$$x \cdot \tan 60° + x \cdot \tan 47° = 840\ m \cdot \tan 47°$$

$$x \cdot (\tan 60° + \tan 47°) = 840\ m \cdot \tan 47°$$

$$x = \frac{840\ m \cdot \tan 47°}{\tan 60° + \tan 47°} = 321{,}2\ m$$

Ahora que conocemos x, sustituimos en cualquiera de las ecuaciones para h:

$$h = x \cdot \tan 60°$$

$$h = 321{,}2\ m \cdot \tan 60° = 556{,}3\ m$$

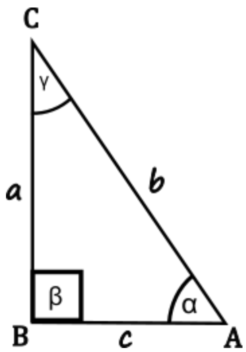
Rta: El dron vuela a una altura de 556,3 m.

Intentar lo siguiente

Resolver los siguientes triángulos rectángulos. Hallar el área.

a) a = 34,63 m y α = 60º 45’ 20’’
b) c = 110,43 m y α = 32º 25’ 17’’
c) a = 30 m y c = 40 m
d) b = 150 m y c = 120 m

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar



7. Resolución de triángulos oblicuángulos

Se estudian cuatro casos, conocidos como clásicos, cuyos datos son:

- dos lados y el ángulo comprendido,
- un lado y dos ángulos,
- tres lados y,
- dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Para la resolución de triángulos oblicuángulos, tenemos que tener presente:

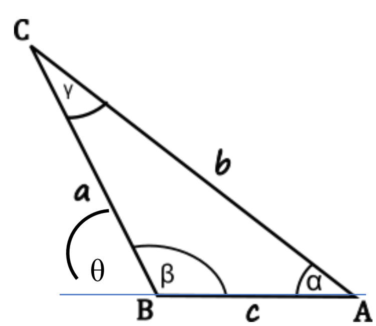
- ✓ el teorema de los senos,
- ✓ el teorema del coseno.

Teorema del seno

En todo triángulo, las medidas de los lados son proporcionales a los senos de los lados opuestos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

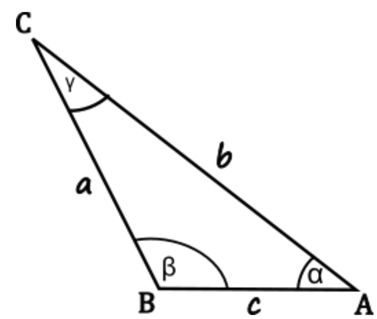
Observación: El seno del ángulo β es igual al seno del ángulo θ (son suplementarios). Si el triángulo es obtusángulo como el mostrado en la figura adjunta, al utilizar el teorema del seno para calcular el ángulo β, la calculadora, por defecto, devolverá un ángulo agudo. Por lo tanto, siempre hay que comprobar que la suma de los tres ángulos interiores sea 180°.



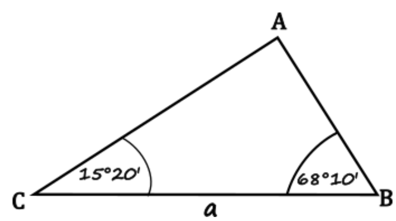
Teorema del coseno

En todo triángulo, el cuadrado de la medida de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos, menos el doble producto entre las mismas y el coseno del ángulo opuesto al primero.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma$$



Ejemplo resuelto 1: resolver el triángulo oblicuángulo y calcular su área conociendo las medidas de un lado ($a = 30$ m) y de los dos ángulos adyacentes al mismo ($\beta = 68°10'$ y $\gamma = 15°20'$).



Solución:

- Cálculo de $\hat{A}$:

$$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C})$$
$$\hat{A} = 180° - (68°10' + 15°20')$$
$$\hat{A} = 180° - 83°30'$$
$$\hat{A} = 96°30'$$

- Cálculo de b:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Longrightarrow b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

$$b = \frac{30 \cdot \operatorname{sen} 68^o\, 10'}{\operatorname{sen} 96^o 30'} = \frac{30 \cdot 0{,}92827}{0{,}99357} \Longrightarrow b = 28{,}03 \text{ m}$$

- Cálculo de c:

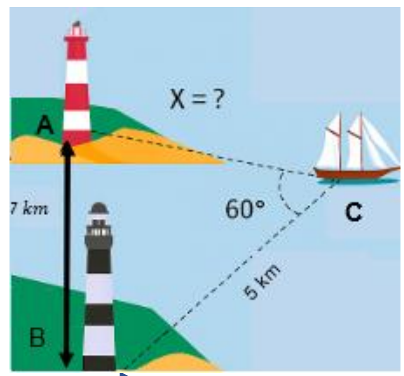
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Longrightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

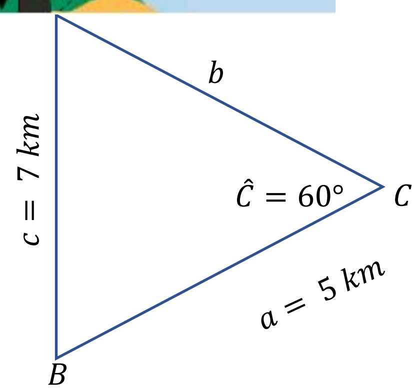
$$c = \frac{30 \cdot \text{sen } 15^{\circ}\, 20'}{\text{sen } 96^{\circ}30'} = \frac{30 \cdot 0{,}26443}{0{,}99357} \Rightarrow c = 7{,}98 \text{ m}$$

- Cálculo del área:

$$S = \frac{1}{2} \text{ab sen C} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 28{,}03 \cdot 0{,}26443 \Rightarrow S = 111{,}17 \text{ m}^2$$

Ejemplo resuelto 2: Un barco deja un faro B y navega mar adentro 5 km. En ese instante observa un faro A que está a 7 km del faro B. Si el ángulo que forman las líneas de visión a ambos faros es de 60° ¿a qué distancia se encuentra el barco del faro A?





Solución: conocemos dos lados, y un ángulo. Podemos usar el teorema del coseno

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

$$(7\ km)^2 = (5\ km)^2 + b^2 + 2 \cdot 5\ km \cdot b \cdot \cos 60°$$

$$49\ km^2 = 25\ km^2 + b^2 + 2 \cdot 5\ km \cdot b \cdot \underbrace{\cos 60°}_{0{,}5}$$

$$49\ km^2 - 25\ km^2 = b^2 + 5\ km \cdot b$$

Se obtiene una ecuación cuadrática:

$$b^2 + 5\ km \cdot b - 24\ km^2 = 0$$

Es decir, es una ecuación de la forma $at^2 + bt + c = 0$, cuyas raíces se obtienen utilizando la fórmula resolvente:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1}$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$t_1 = \frac{-5 + 11}{2} = 3; \;\; t_2 = \frac{-5 - 11}{2} = -8$$

Las medidas de los lados de un triángulo deben ser positivos, por eso descartamos la raíz negativa. Entonces, el lado b mide 3 km.

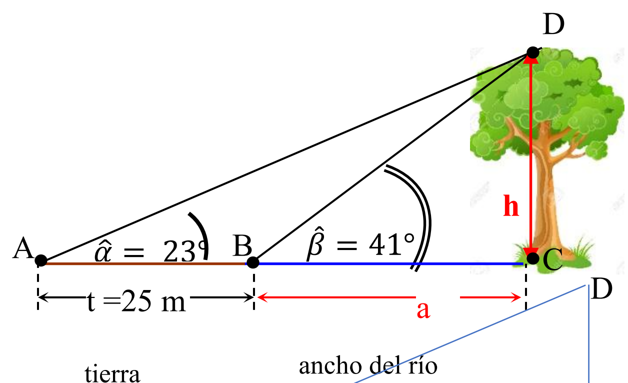
Rta: el barco se encuentra a una distancia de 3 km del faro A.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

Ejemplo resuelto N° 3: Quieres calcular la anchura de un río y la altura de un árbol que está en la orilla opuesta. Para ello te sitúas frente al árbol, mides el ángulo que forma con la horizontal la visual a la parte alta del árbol (41º). Te alejas del árbol, en dirección perpendicular a la orilla, andando 25 m. Vuelves a medir el ángulo que forma la horizontal con la visual a la parte alta del árbol. Ahora son 23º. ¿Qué altura tiene el árbol y cuál es el ancho del río?

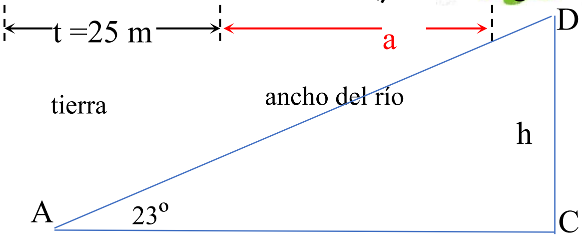
Solución: Hacemos un esquema de la situación e identificamos los datos y las incógnitas.

Datos: $\hat{\alpha} = 23°$; t = 25 m, $\hat{\beta} = 41°$ **Incógnitas:** a, h



Este problema lo vamos a resolver utilizando dos métodos diferentes. En primer lugar, lo haremos resolviendo un triángulo oblicuángulo. Y después se mostrará que se obtienen resultados idénticos, resolviendo dos triángulos rectángulos.

Procedimiento 1:



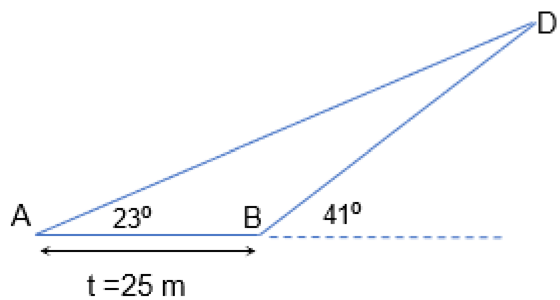
En el triángulo rectángulo ACD:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{h}{AD} \Longrightarrow h = AD \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}$$

$$h = AD \cdot \operatorname{sen} 23°$$

En el triángulo ABD, por el teorema del seno:

$$\frac{AD}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\widehat{D}} \Longrightarrow AD = AB \cdot \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{D}}$$



El ángulo $\widehat{B} = 180° - 41° = 139°$.

Además, por propiedad de los ángulos exteriores de un triángulo, es:

$$41° = 23° + \widehat{D} \Longrightarrow \widehat{D} = 41° - 23° \Longrightarrow \widehat{D} = 18°$$

$$AD = AB \cdot \frac{\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{D}} \Longrightarrow AD = 25\ \mathrm{m} \cdot \frac{\operatorname{sen} 139°}{\operatorname{sen} 18°}$$

$$AD = 53{,}08\ \mathrm{m}$$

Combinando los resultados obtenidos, resulta:

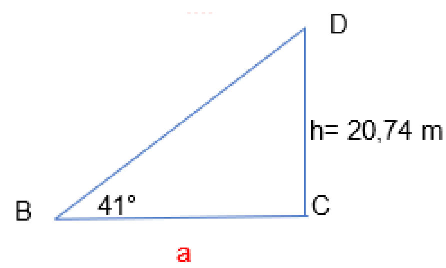
$$h = AD \cdot \operatorname{sen}\widehat{A} = 53{,}08\ \mathrm{m} \cdot \operatorname{sen}\widehat{23} = 20{,}74\ m$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{h} = 25\ \mathrm{m} \cdot \frac{\operatorname{sen} 139°}{\operatorname{sen} 18°} \cdot \operatorname{sen} 23° \ = \ 25\ \mathrm{m} \cdot \frac{0{,}656 \cdot 0{,}3907}{0{,}3090}$$

$$\mathrm{h} = 20{,}74\ \mathrm{m}$$

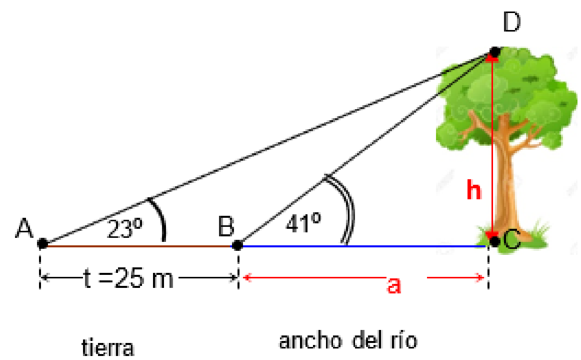
Finalmente, en el triángulo rectángulo BCD, conocemos el cateto opuesto al ángulo de 41°, y el ancho del río es el cateto adyacente. Usamos la tangente:



$$\tan 41° = \frac{h}{a} \Rightarrow a \cdot \tan 41° = h \ \Rightarrow a = \frac{h}{\tan 41°} = 23{,}85\ m$$

Rta: la altura del árbol es de 20,74 m y el ancho del río es de 23,85 m.

Procedimiento 2: Vamos a mostrar el segundo procedimiento, usando razones trigonométricas en triángulos rectángulos.



En el triángulo ACD:

$$\tan 23° = \frac{h}{25m + \ a} \Rightarrow h = \tan 23° \cdot (25\ m + a) \quad (1)$$

En el triángulo BCD

$$\tan 41° = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \tan 41° \cdot a \quad (2)$$

Esto es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Igualando (1) y (2) se obtiene:

$$\tan 41° \cdot a = \tan 23° \cdot (25\ m + a)$$

$$\tan 41° \cdot a = \tan 23° \cdot 25\ m + \tan 23° \cdot a$$

$$\tan 41° \cdot a - \tan 23° \cdot a = \tan 23° \cdot 25\ m$$

$$(\tan 41° - \tan 23°) \cdot a = \tan 23° \cdot 25\ m$$

$$a = \frac{\tan 23° \cdot 25\ m}{\tan 41° - \tan 23°} = 23{,}86\ m$$

Y luego sustituimos este resultado en (2):

$$h = \tan 41° \cdot a = \tan 41° \ \cdot 23{,}85\ m = 20{,}74\ \mathrm{m}$$

Obteniéndose el mismo resultado que con el primer procedimiento seguido.

Intentar lo siguiente:

Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos, sabiendo que:

a) $a = 132$ m.; $C = 148$ m. y $\beta = 51º\,26'\,12''$
b) $c = 156{,}35$ m; $\alpha = 36°\,52'\,12''$ y $\beta = 69°\,23'\,13''$
c) $a = 176$ m; $b = 241$ m y $C = 123$ m
d) $a = 300$ m.; $B = 200$ m y $\beta = 30°$

8. Aplicaciones de la resolución de triángulos

A menudo, para resolver un problema comenzamos por determinar un triángulo que después resolvemos para encontrar una solución.

Directrices para resolver un problema de triángulos:

1º) Dibujar un croquis de la situación del problema.
2º) Buscar triángulos y representarlos en el dibujo.
3º) Señalar lados y ángulos, tanto conocidos como desconocidos.
4º) Expresar el lado o el ángulo buscado en términos de razones trigonométricas conocidas. Después, resolver.

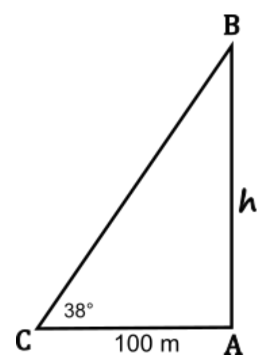
Ejemplo: Calcular la altura h de un pino tal que si nos colocamos a una distancia de 100 m. del pie del pino (A), la medida del ángulo formado entre la visual dirigida a la copa del pino y el suelo es de 38°.

Solución:

$$\text{tg}\,38° = \frac{h}{100} \Longrightarrow h = 100 \cdot \text{tg}\,38° =$$
$$h = 100 \cdot 0{,}78129$$
$$h = 78{,}13$$

Rta: la altura del pino es de 78,13 metros.

Esquema o croquis



Ejemplo: Calcular la altura h de una torre cuyo pie (H) es inaccesible, sabiendo que, si dos observadores se ubican en las posiciones A y B, a una distancia entre sí de 100 m, ven la torre bajo un ángulo de $37°\,45'$ y $25°\,10'$, respectivamente. (A, B y H están alineados)

Solución:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
✉ Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

En el triángulo ATH:

$$\text{sen A} = \frac{\text{h}}{\text{AT}} \Longrightarrow \text{h} = \text{AT} \cdot \text{sen A}$$

En el triángulo BTA, por el teorema del seno:

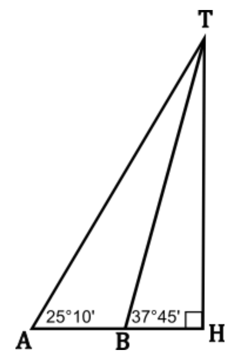
$$\frac{\text{AT}}{\text{sen B}} = \frac{\text{AB}}{\sin \text{T}} \Longrightarrow \text{AT} = \text{AB} \cdot \frac{\sin \text{B}}{\sin \text{T}}$$

Combinando las relaciones obtenidas, resulta:

$$\text{h} = \text{AT} \cdot \text{sen A} = \text{AB} \cdot \frac{\sin \text{B}}{\sin \text{T}} \cdot \text{sen A}$$

Además, por propiedad de los ángulos exteriores de un triángulo, es:

$$37° \, 45' = 25° \, 10' + \widehat{\text{T}} \Longrightarrow \widehat{\text{T}} = 12° \, 35'$$



Esquema o croquis

Por lo tanto:

$$\text{h} = 100 \cdot \frac{\text{sen}37^{\text{o}} \, 45' \cdot \text{sen } 25^{\text{o}} \, 10'}{\text{sen } 12^{\text{o}} \, 35'} = 100 \cdot \frac{0{,}61222 \cdot 0{,}42525}{0{,}21786}$$

$$\text{h} = 119{,}5$$

Rta: la altura de la torre es de 119,5 metros.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales
🖂 Félix de Azara 1552 – (3300) Posadas (Misiones - Argentina)
☎ (0376) 4435099 – www.fceqyn.unam.edu.ar

Guía de ejercicios n°4

1. Convertir las siguientes medidas a radianes:

   a) 60º   c) -270º   e) 789º
   b) 585º20´45"   d) 115º   f) 1025º

2. Convertir las medidas a grados:

   a) 2 radianes   c) -12π   e) 5π/4
   b) 8π   d) 3π/4   f) π

3. Calcular la longitud de los arcos cuyas amplitudes y radios son:

   a) α = 4 rad   r = 200cm
   b) α = 0.348 rad   r = 5.3 .1 m
   c) α = 45º   r = 1.8m
   d) α = 2π/3   r = π cm
   e) α = 28º   r = 1cm

4. ¿A cuántos grados sexagesimales equivales 1 radián?
5. Si un reloj marca las 5hs, ¿Cuál es la medida en radianes del ángulo que forman las agujas?
6. La suma de los ángulos agudos de un rombo es 72º. Calcular el valor de los ángulos obtusos en grados sexagesimales y en radianes.
7. ¿En qué cuadrante se encuentra el lado terminal de cada uno de los siguientes ángulos?:

a) 34º   d) –185º   g) 495º
b) 320º   e) 60º   h) 555º
c) –120º   f) –135º   i) 1348º

8. Encontrar todos los α entre 0 y 2π

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ e) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i) $\operatorname{sen}\alpha = 2$
b) $\operatorname{sen}\alpha = 1$ f) $\cos\alpha = -0{,}7$ j) $\cos\alpha = -1$
c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\cos\alpha = -\frac{3}{2}$ k) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$
d) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$ h) $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{cotg}\alpha$

9. Si θ es un ángulo agudo y cos θ = ¾, encuentre los valores de las demás funciones trigonométricas de θ.
10. Si θ es un ángulo agudo y tan θ = 5/12, encuentre los valores de las demás funciones trigonométricas de θ.

11. Determinar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos:

a) $(-3,2)$ y $(7,-3)$ b) $(0,0)$ y $(1,3/4)$ c) $(-1,5)$ y $(0,0)$ d) $(-1,1)$ y $(5/3, 1)$

12. Dadas las siguientes medidas de los tres lados de un triángulo, ¿cuáles de ellos son rectángulos?

a) 6; 7,5 ; 4,5 b) 4 ; 8 ; 5 c) 5 ; 13, 12

13. En un triángulo ABC, rectángulo en A, calcular el valor exacto de las demás partes, si:

a) $b = 5$ y $c = 5$ b) $b = 5\sqrt{3}$ y $c = 10\sqrt{3}$

14. Construir un triángulo ABC, rectángulo en A y denomine a, b y c a los lados opuestos a los ángulos con vértices correspondientes a las mayúsculas. Si α, β y γ son los ángulos cuyos vértices son: A, B y C, respectivamente, obtener los demás elementos, en cada caso:

a) $\beta = 71°51'$ $b = 240$ d) $\beta = 37°$ $c = 24$

b) $b = 2,1$ $c = 5,8$ e) $a = 45$ $b = 25$

c) $\gamma = 64°20'30''$ $a = 20,15$ f) $a = 0,68$ $c = 0,42$

15. Resolver los siguientes problemas utilizando triángulos rectángulos:

a) Una antena de 20 m de altura se encuentra sujeta por un cable de 35 m. Calcular la distancia existente entre la base de la antena y el extremo del cable.

b) Calcular la altura que debe tener una escalera para que apoyada en una pared alcance una altura de 2,85 m, al formar con el plano del piso un ángulo de 1 radián.

c) La cuerda de un cometa forma un ángulo de 31º40´con el nivel del piso y tiene una longitud de 455 metros. ¿A qué altura se encuentra el cometa?

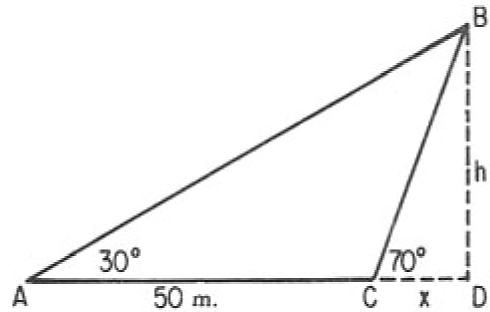
d) ¿Cuál es el ángulo de inclinación del sol cuando un objeto de 6m proyecta una sombra de 10,3 m?

e) Una persona se encuentra a 120m de un árbol, y observa que la línea visual de la punta del árbol forma un ángulo de 32º con la horizontal. Calcula la altura del árbol sobre el nivel de sus ojos.

f) Un alambre de suspensión mide 13,6 m de largo, y está sujeto a un poste a 6,5 metros sobre el nivel del suelo. ¿Qué ángulo forma el alambre con el suelo?

g) Calcular la superficie de un triángulo isósceles de 151m de base, sabiendo que el ángulo opuesto a ella es de 105º12´40”.

h) Suponga que el punto B de la figura sea la cima de una colina y el punto D es inaccesible. En tal caso las únicas mediciones posibles sobre tierra son las especificadas en dicha figura. Calcule la medida aproximada de h.



i)

16. Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos (en todos los casos, las letras minúsculas representan el lado opuesto al ángulo del mismo nombre con letra mayúscula)

$$a.\begin{cases} A = 133º \\ B = 55º \\ a = 1m \end{cases} \quad b.\begin{cases} a = 7m \\ b = 9m \\ C = 60º \end{cases} \quad c.\begin{cases} A = 45º \\ B = 30º \\ c = 2{,}5m \end{cases} \quad d.\begin{cases} a = 3m \\ b = 4m \\ c = 5m \end{cases}$$

$$e.\begin{cases} A = \pi/3 \\ B = \pi/6 \\ a = 1 \end{cases} \quad f.\begin{cases} a = 7km \\ b = 5km \\ B = 133º \end{cases} \quad g.\begin{cases} a = 3\,km \\ b = 4\,km \\ c = 8\,km \end{cases} \quad h.\begin{cases} b = 28cm \\ c = 19\,cm \\ C = 60º \end{cases}$$

17. Y ahora algunos problemas:
    a) Uno de los lados de un triángulo mide 12 y su ángulo opuesto mide 20º. Si otro de los lados mide 10m, hallar el resto de los elementos del triángulo.
    b) Los lados de un triángulo miden a, ½ a y 2/3 a. Hallar los ángulos
    c) Uno de los lados de un triángulo mide 0,5 radianes. Si los lados que forman dicho ángulo miden8 mm y 10 mm, hallar el resto de los elementos del triángulo.
    d) Si se abren completamente un par de tijeras, la distancia entre los puntos de las dos hojas es de 10 cm. Calcular el ángulo que subtienden dichas hojas si su longitud es de 8 cm.
    e) Desde un punto del suelo un observador ve que la visual a la punta de una torre forma con la horizontal un ángulo de 30º. Cuando avanza 20 m hacia la torre, dicho ángulo es de 45º. Hallar la altura de la torre.
    f) Dos puestos de observación A y B, separados por una distancia de 4km, forman un triángulo con el pico de la montaña. Desde el puesto A, el ángulo entre el pico de la montaña y el puesto B es de 20º, y desde el puesto B, el ángulo ente el pico y el puesto A es de 30º. Calcular las distancias ente el pico y dada uno de los puestos de observación.

g) En el triángulo ABC, el lado AB mide 13m, lado BC mide 15m y el AC mide 14m. Calcula el área del triángulo.

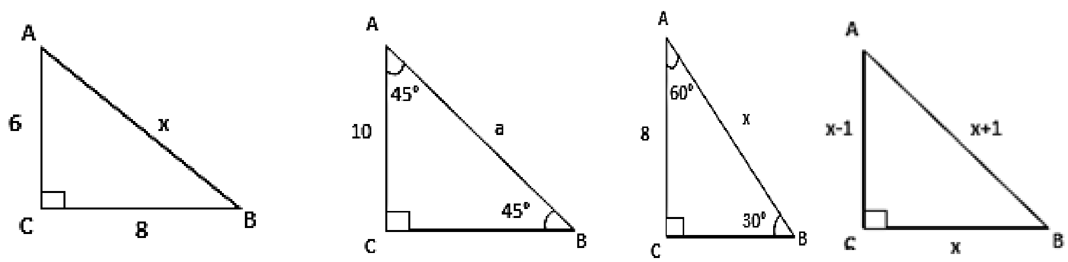
h) Juan va a cercar con alambre un terreno triangular, uno de cuyos lados mide 8,25 m y otro de ellos mide 10,45m. El ángulo comprendido entre ambos lados es de 110º. ¿Cuántos metros de alambre necesitará Juan?

18. Un avión sobrevuela una ciudad costera a 1200m de altura; cuando pasa por la playa, avista una isla que se encuentra a 2078 m de la playa. Calcule el ángulo que forma la línea que une la posición del piloto en ese instante y la isla, con la superficie del mar (horizontal). Expresar este ángulo en grados sexagesimales y en radianes.

19. En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide 2,5 m y el otro mide el triplo de éste. Construya un dibujo representativo y obtenga: a) el valor de la hipotenusa. b) la medida del ángulo agudo interior mayor.

20. En un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos mide 32°30’30’’. Si el cateto adyacente a éste mide 5,27 cm, ¿cuál es el valor de la hipotenusa?

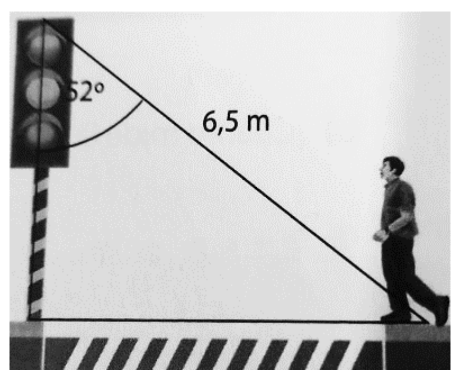
21. En cada caso, calcular el valor de x:



22. a) ¿Cuál es la altura del semáforo?

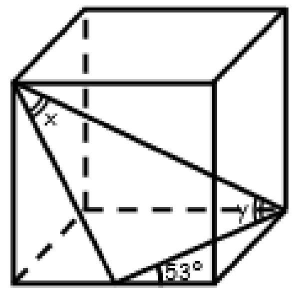
b) A qué distancia del hombre se encuentra el semáforo? Justificar los valores con los cálculos correspondientes.

Nótese que el ángulo que forma el semáforo con la diagonal que va hasta el hombre es de 62°.

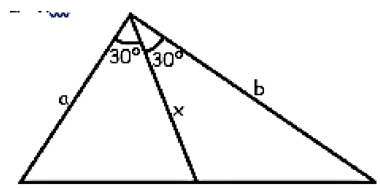


23. Se desea sujetar un poste de 15m de altura con una soga que parte desde la parte superior de dicho poste y llega hasta el suelo, formando 37° con el piso. Se quiere comprar la cantidad justa de soga. a) calcular la longitud de la soga. b) Si el metro de soga vale $634,50. ¿Cuál es será el precio de la soga necesaria?

24. En el cubo mostrado, calcular el valor $E = \sqrt{17}\cos x + 5\cos y$



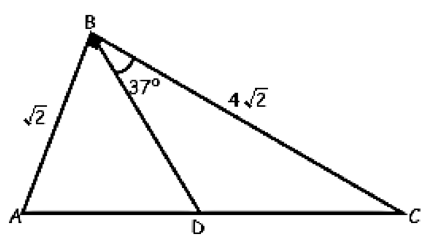
25. Indicar el valor de x, justificando la respuesta dada con los cálculos correspondientes:



a) $\frac{ab}{a+b}$ b) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$ c) $\frac{a+b}{a-b}$

d) $\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{3}$ e) $\frac{a+b}{2}$

26. Indicar el valor del segmento BD, justificando la respuesta dada con los cálculos correspondientes:



a) $5\sqrt{2}$ b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$