FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, QUÍMICAS Y NATURALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

INGRESO 2024

MATEMÁTICA

CARRERAS DEL MÓDULO INFORMÁTICO:

ANALISTA EN SISTEMAS DE COMPUTACIÓN
LICENCIATURA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN
PROFESORADO UNIVERSITARIO EN COMPUTACIÓN

BIENVENIDOS

El presente material correspondiente al área **MATEMÁTICA** fue elaborado para que los **Aspirantes a Ingresar en la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales** de la Universidad Nacional de Misiones, puedan acceder al Programa de Contenidos mínimos de Matemática, requeridos para ingresar a las carreras: **Licenciatura en Sistemas de Información, Analista en Sistemas de Computación y Profesorado Universitario en Computación**, de esta facultad y cuenten con un material básico de estudio –con conceptos y actividades- que los ayuden en su preparación para el examen de admisión a la F.C.E.Q. y N.

La MATEMÁTICA es una disciplina, cuya enseñanza y aprendizaje es indispensable y está presente en los programas de ingreso para cualquier carrera que el estudiante se disponga a iniciar; sin embargo, es bien conocido que, en los últimos años, los aspirantes a seguir estudios universitarios tropiezan con dificultades severas en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos exigidos.

Contribuir a enfrentar los nuevos desafíos y mejorar las condiciones con que ingresan los estudiantes y así aumentar sus posibilidades de éxito es uno de los propósitos de este curso, el cual forma parte de todo un sistema diseñado para facilitar la transición entre la escuela media y la universidad.

El equipo Docente del Departamento de Matemática que coordina las acciones referidas al Área Matemática del Ingreso 2024 son:

- **Coordinadores del Aula Virtual de Matemática. Sede Posadas**.
  - ✓ Prof. Mgter. MARGARITA DEL CARMEN BENITEZ.
  - ✓ Prof. ALEJANDRO MORENO.
  - ✓ Prof. ROXANA OPERUK.
- **Coordinadora del Aula Virtual de Matemática. Sede Apóstoles**.
  - ✓ Prof. NORMA MARTYNIUK

El equipo docente que estuvo a cargo de la elaboración del presente material ha sido:
Alicia I. ABRAVANEL; Julia M. ANSÍN ANTILLE; Marys M. ARLETTAZ; Silvia CARONÍA; Adriana G. DUARTE, Nancy E. JAGOU; Julieta E. KORNEL; Luisa L. RIVERO; Graciela E. SKLEPEK.
Actualizaciones: FERNÁNDEZ, Eduardo, FREAZA, Nora; LAGRAÑA, Claudia; MORENO, Alejandro; RIVERO, Marta.

AUTORIDADES de la
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, QUÍMICAS Y NATURALES

Félix de Azara 1552 – CPA: N3300BSP – Posadas - Misiones

DECANO

Dr. Dardo Andrea MARTI

VICE-DECANO

Dra. Sandra Liliana GRENON

SECRETARIA ACADÉMICA

Dra. Claudia Marcela MENDEZ

SECRETARIA ACADÉMICA ADJUNTA

Dra. Gladys GARRIDO

SECRETARIA ADMINISTRATIVA

Srta. Miriam Raquel DAVIS

SECRETARIO DE BIENESTAR ESTUDIANTIL

Sr. Carlos Adrián SOTELO

SECRETARIA DE BIENESTAR ESTUDIANTIL ADJUNTO

Srta. Clarisse PITTANA HENGEN

SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Dr. Enrique Jorge DESCHUTTER

SECRETARIO DE EXTENSIÓN Y VINCULACIÓN TECNOLÓGICA

Mgter. Alice RAMBO

Estimados Ingresantes

Están Ustedes comenzando a recorrer una nueva etapa de sus vidas, la que comprende la realización de estudios universitarios. Para hacerlo han elegido como vía la Universidad Nacional de Misiones, lo cual nos halaga y enorgullece.

Queremos decirles que quienes pertenecemos a esta casa de estudios, asumimos el compromiso de ayudarlos a transitar el camino de su formación, tratando de que lo hagan de la mejor manera posible, para llegar a la ansiada meta de lograr el título universitario que desean. No obstante, para ello deben prepararse apropiadamente. Esto debe entenderse desde el mismo inicio.

Orgullosamente pertenecemos al conjunto de Universidades Públicas de la República Argentina. Esto implica el deber de llevar a cabo una serie de actividades que conforman nuestra razón de ser. La más conocida e importante de ellas es la enseñanza. Se trata no solamente de la introducción de conocimientos, habilidades, prácticas o, en general, competencias exclusivamente propias de cada profesión, también consiste en procurar la formación y el desarrollo de valores característicos de las sociedades justas, tales como la solidaridad, la libertad y la dignidad. Todo esto representa una serie de desafíos que debemos enfrentar mancomunadamente para poder lograrlos.

Entre Ustedes y nosotros debemos llevar adelante el proceso enseñanza y aprendizaje. Insistimos, Ustedes y nosotros, con la participación de sólo una de las partes no alcanza.

Desde el primer día deben saber que los estudios superiores involucran trabajo intelectual que requieren de mucho esfuerzo y dedicación. El logro de los objetivos será posible si se comprometen con el estudio. ¡Creemos que esto es posible!

Queremos decirles que, además del **cuadernillo** que consta de tres módulos, ponemos a disposición de Ustedes la posibilidad del “encuentro virtual” con nosotros a través del **aula virtual** donde podrán plantear sus inquietudes y/o realizar consultas relacionadas con su preparación matemática, los conceptos y actividades del cuaderno de ingreso y nosotros intentaremos dar respuestas a las mismas. Utilizaremos para esta interacción el **foro**.

¡Bienvenidos y comencemos la labor!

Equipo Docente de Matemática

PROGRAMA

Tema 1: Conjuntos Numéricos

Números: Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales. Operaciones y propiedades. Notación científica. Orden. Representación en la recta numérica. Aplicación de las propiedades de las resoluciones de ecuaciones e inecuaciones. Número complejos. Forma binómica.

Tema 2: Funciones Polinómicas

Forma general. Grado. Análisis de gráficos de funciones polinómicas. Intersección con los ejes coordenados. Operaciones con polinomios. Divisibilidad de polinomios: Teorema del Resto y Teorema del factor. Factoreo. Simplificación de expresiones racionales. Resolución de ecuaciones racionales.

Tema 3: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ecuaciones de primer grado con una y con dos variables. Solución analítica y gráfica. Sistemas de dos ecuaciones con dos variables. Resolución analítica por igualación, sustitución o eliminación. Interpretación geométrica de las distintas soluciones.

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

UNIDAD 1: CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.1. IDEA INTUITIVA DE CONJUNTOS

En el lenguaje cotidiano, en un diario o una revista de actualidad, se usan normalmente las palabras conjunto o colección, como por ejemplo:

1. “El conjunto de jugadores de la Selección Nacional se concentrará en un hotel céntrico a partir de mañana.”

2. “Una importante **colección** de estampillas será subastada el próximo lunes.”

3. “El **conjunto** musical Los Diablos grabó su primer CD.”

4. “El **conjunto** de los enteros no tiene primer elemento”.

5. “Las estrellas no están uniformemente distribuidas en el espacio, sino que se concentran por miles de millones. Estos **conjuntos** de estrellas son llamados galaxias.

En matemáticas, también, cuando se estudian objetos de diferentes tipos, por ejemplo, *puntos*, *números*, *vectores*, en virtud de ciertas propiedades de estos objetos o elementos, forman **colecciones** o **conjuntos**.

Cada grupo o conjunto antes mencionado, está constituido por objetos: jugadores de fútbol, músicos, estampillas, números, estrellas. Estos objetos **caracterizan** a cada uno de los conjuntos.

Los ejemplos anteriores nos dan sólo una idea intuitiva del concepto de conjunto. Se considera a éste como un concepto primitivo. Cualquier intento de definición nos llevaría a utilizar otras nociones (reunión, colección, agrupación) que quedaría sin definir.

Aceptaremos pues la existencia de objetos primitivos llamados conjuntos, y una relación binaria entre un conjunto y los elementos que lo constituyen, llamada **pertenencia**.

A los conjuntos se los suele designar por letras mayúsculas y a los objetos que los forman con letras minúsculas.

El signo $\in$ simboliza la relación de pertenencia. Si a es un elemento del conjunto **A**, la expresión $a \in A$ la leeremos “el elemento a pertenecer al conjunto A”. En cambio “el elemento a no pertenece al conjunto A” se simboliza como $a \notin A$.

Debemos tener presente que la noción de elemento es sólo relativa, no tiene sentido decir “a es un elemento”, lo correcto es decir “a es un elemento del conjunto A”.

1.1.1. Representación de conjuntos

Cada uno de nosotros podrá entonces formar un conjunto, reuniendo simplemente los objetos que desee.

1. Sea por ejemplo A, el conjunto formado por esta lapicera, este lápiz y esta calculadora. Utilizaremos como notación para el conjunto A:

A= {esta lapicera, este lápiz, esta calculadora}

Formaremos ahora el conjunto B constituido por dos de las tenistas más importantes de nuestro país.

B= {Gabriela Sabatini, Mercedes Paz}

Hemos formado los conjuntos A y B enumerando sus elementos, es decir por ***extensión***.

2. ¿Existe otra manera de representar conjuntos? Sí.

Podemos además representar un conjunto enunciando una propiedad que cumplan sus elementos y sólo ellos. Esta representación se denomina por ***comprensión***.

Sea C el conjunto formado por todos los insectos que tienen ocho patas.

En este caso escribiremos:

C= {x/x es insecto y x tiene 8 patas}

Sea D el conjunto definido por:

$$D = \{x /\ x \in R \ \text{ y } \ x^2 - 2 = 0\}.$$

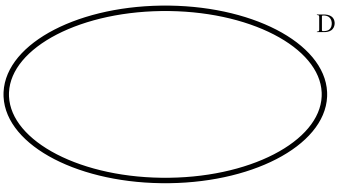
Este conjunto D puede ser expresado también por extensión; en efecto, si resolvemos la ecuación $x^2 - 2 = 0$, vemos que los únicos valores que la satisfacen son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$ que son dos números reales, por lo tanto:

$$D = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

<u>Ejercicio</u>. Defina tres conjuntos indicando una o más propiedades que deban verificar sus elementos, es decir por comprensión.

3. Para representar conjuntos en forma gráfica, utilizaremos curvas cerradas. Así por ejemplo al conjunto D lo representaremos por el siguiente diagrama, llamado diagrama de Venn

D



Convendremos en representar a los elementos del conjunto por puntos situados en la región interior a la curva, y a los elementos que no pertenecen al conjunto por puntos en la región exterior a la misma.

1.1.2. Relación de inclusión

Definición. Se dice que un conjunto A está ***incluido*** en otro conjunto B si todo elemento de A pertenece a B.

Como notación se emplea $A \subset B$, que se lee "A está ***incluido*** en B", o también A es ***un subconjunto*** de B. Esta relación es sinónima de la que enuncia "B contiene a A" y que se escribe $B \supset A$.

Ejemplo 1. La recta A está incluida en el plano B.

La negación de tal relación se denota $A \not\subset B$ y se lee "A no está incluido en B", lo que se verifica cuando existe en A un elemento que no pertenece a B.

Ejemplo 2. Con motivo de las próximas olimpíadas deportivas organizadas por nuestra Universidad, 15 alumnos de este curso pueden inscribirse en una de estas disciplinas y sólo una de ellas: Fútbol, Básquet, Vóley, Ajedrez.

Designemos con A al conjunto de los 15 alumnos que participarán en las próximas olimpíadas deportivas.

El conjunto F de los alumnos participantes que jugarán al fútbol es entonces **un subconjunto** del conjunto A.

Este hecho lo representaremos utilizando el símbolo: $F \subset A$.

Del mismo modo el conjunto B de los alumnos que practicarán básquet es también una parte del conjunto A. Por lo tanto lo denotaremos: $B \subset A$.

Igualdad de dos conjuntos. Si se verifica a la vez $A \subset B$ y $B \subset A$ se dice que "A es **igual** a B" o que "A **coincide** con B", lo que se escribe $A = B$.

Esta igualdad significa que todo elemento de A pertenece a B, y que todo elemento de B pertenece a A. La negación de esta relación se enuncia así:

"Existe, en uno de los conjuntos, un elemento que no pertenece al otro", y se escribe $A \neq B$, que se lee "A es **distinto** de B", y también A es **diferente** de B".

1.1.3. Operaciones entre conjuntos

Dados dos conjuntos A y B definiremos nuevos conjuntos, llamados intersección, unión y diferencias entre A y B y denotados respectivamente $A \cap B$, $A \cup B$ y $A - B$.

1. $A \cap B$ es el conjunto de los objetos que son simultáneamente elementos de A y de B. En notación conjuntista podemos escribir:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

2. $A \cup B$ es el conjunto de los objetos que son elementos de uno por lo menos de los conjunto A ó B. En notación conjuntista, se escribe:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$$

3. A – B es el conjunto de los objetos que son elementos de A y no de B.

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

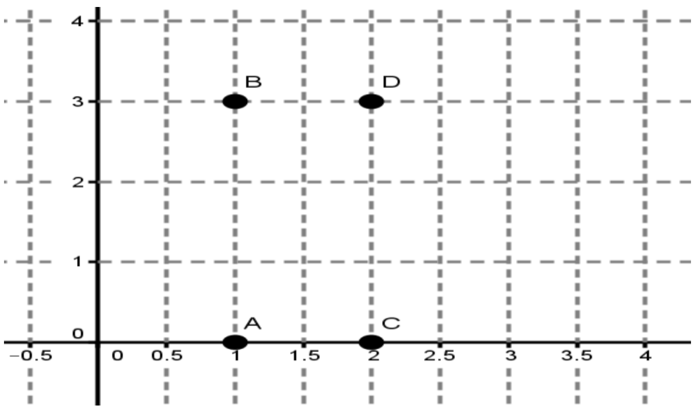
Sugerencia para el alumno: hacer el diagrama de Venn que represente cada una de las operaciones definidas entre conjuntos.

1.1.4. Conjunto de pares ordenados

A dos objetos cualesquiera *a* y b, es posible asociar un nuevo objeto, el par ordenado (*a*, *b*). El primer objeto *a*, tomado de un conjunto cualquiera E, y el segundo, *b*, de otro F. Estos pares (*a*, *b*) son elementos de un nuevo conjunto que se llama conjunto producto de E y F y que se escribe E x F. Así,

$$\mathbf{E \times F} = \{(a, b) / a \in E \text{ y } b \in F\}$$

Ejemplo. Sean los conjuntos A= {1, 2} y B= {0, 3}, entonces el conjunto producto A x B = {(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3)}. En un sistema de ejes coordenados cartesianos x-y, la representación del conjunto producto es:



1.2.1. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Constantemente relacionamos conjuntos con distintos fines. Uno de ellos es el de contar sus elementos. Para contar utilizamos los **números naturales**.
Al principio, el hombre fue relacionando conjuntos para contar sus elementos. Al comparar cantidades, se acercó a nuestra noción actual de contar mediante correspondencias, por ejemplo, con partes del cuerpo: "tengo tantas vacas como dedos en una mano".
Cada vaca se relaciona con un único dedo; los elementos del conjunto vaca se pueden "aparear" con el conjunto de los dedos de la mano; decimos, entonces, que estos conjuntos son *coordinables*, o que tienen el mismo *cardinal.*

- El cardinal de un conjunto finito es un número **natural**.

Ejemplos:

El cardinal del conjunto de vacas es el número 5. El cardinal de notas musicales es 7. El cardinal del conjunto vacío es 0.

- Al conjunto de los números naturales lo designamos con N:

$\mathbf{N_0}$= {0, 1, 2, 3, 4,5,…}

- Las propiedades de **N** son:

1. Es **infinito** (∞).
2. Tiene primer elemento: cero. No tiene último elemento.
3. Todo número natural tiene un **sucesor.** Un número natural y su sucesor se dicen **consecutivos**.
4. Todo número (excepto cero) tiene un **antecesor**.
5. El sucesor **c** de un número natural b es mayor que él y su antecesor **a** es menor. Simbólicamente: $\mathbf{a < b < c}$
6. Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales. Por eso se dice que es un conjunto discreto.

1.2.2. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Entonces, el hombre conoce los números naturales desde el momento en que tuvo necesidad de contar, pero éstos no le alcanzan para expresar muchas situaciones.

Los números **enteros son una ampliación de los naturales:** los naturales se consideran enteros positivos (se escriben con el signo +).Los enteros negativos van precedidos del signo. El cero es un entero pero no es ni negativo ni positivo.

Al conjunto de los números enteros lo designamos con **Z**
Z = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,...}

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

- Las propiedades de Z son:

1. Es infinito (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Todo número entero tiene un sucesor. Un número entero y su sucesor se dicen consecutivos.
4. Todo número entero tiene un antecesor.
5. El sucesor **c** de un número natural **b** es mayor que él y su antecesor **a** es menor. Simbólicamente: **a < b < c**
6. Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros. Por eso, el conjunto de números enteros es discreto.

1.2.3. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Los números naturales ni los números enteros son suficientes para poder expresar de forma adecuada las relaciones que existen entre una parte y el todo. De ahí que precisemos números fraccionarios y decimales para representar, por ejemplo, la parte de alumnos de la clase que aprueban todas las asignaturas, o la superficie que ocupa el patio respecto al centro.

Una fracción en el lenguaje común significa una porción o parte de un todo. En Matemáticas se usa también el término **fracción** para nombrar números que son una parte de la unidad o también aquellos números que sean iguales a un número entero más una parte de la unidad.

Ejemplos:

- Tomás comió tres de las cuatro partes de las que constaba su tableta de chocolate → $\frac{3}{4}$
- 4 dividido 3 → $\frac{4}{3}$

- Se llama **fracción** a un cociente de números enteros, $\frac{a}{b}$, donde b es distinto de 0.

- Todo **número entero** se puede expresar como una **fracción** con denominador 1.

Ejemplos: $3 = \frac{3}{1}$; $-4 = \frac{-4}{1}$

> Todo número que puede ser expresado mediante una fracción es un **número racional**. A este conjunto de números los designamos con la letra Q.

- Todo **número racional** se puede expresar como **número decimal exacto** o **periódico**.

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

Ejemplos: $0{,}4 = \frac{4}{10}$; $\frac{1}{3} = 0{,}333333333\ldots = 0{,}\widehat{3}$

➢ Dos fracciones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, que cumplen la condición $ad = cb$ son **equivalentes** Esto significa que expresan el mismo número racional.

➢ La unión del conjunto **Z** de números enteros y el conjunto de **números fraccionarios** que no representan números enteros es el conjunto Q de los **números racionales**.

➢ Las propiedades de Q son:

1. Es **infinito** (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.

3. Entre dos números racionales existen infinitos racionales. Por ello, se dice que el conjunto de números racionales es **denso**.

Ejemplo: Entre $\frac{1}{2}$ y 1 se puede encontrar tantos racionales como se quiera. Basta convertir estas fracciones en otras equivalentes de denominador mayor.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{2} & & & & 1 \\
\frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{2}{2} \\
\frac{4}{8} & \frac{5}{8} & \frac{6}{8} & \frac{7}{8} & \frac{8}{8} \\
\frac{8}{16} & \frac{8}{17} & \ldots\ldots\ldots & & \frac{16}{16} \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

4. Como consecuencia de la propiedad anterior, ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.

➢ Q es un conjunto ordenado por la relación menor o igual. Si los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fraccionarios irreducibles, se cumple que:

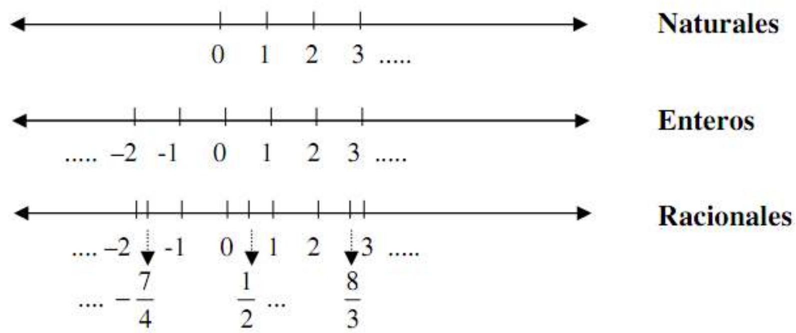
$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > cb$$

Ejemplos:

- $\frac{2}{3} > \frac{1}{5}$ porque $2 \,.\, 5 > 3 \,.\, 1$

- $-\frac{1}{2} < \frac{6}{7}$ porque toda fracción negativa es menor que cualquier fracción positiva.
- $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ porque toda fracción cuyo numerador es mayor que el denominador es mayor que la unidad.

La representación en la recta numérica de los distintos números que hemos visto hasta aquí es:



***Pregunta**: ¿Los números racionales completan la recta numérica? O, la misma pregunta con otras palabras, ¿quedan puntos de la recta a los que no les corresponde ningún número racional?*

1.2.4 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en el campo de los números racionales. La solución a esta ecuación requiere la descripción de los **números irracionales**.

Los números irracionales son aquellos cuya expresión decimal es infinita y no tiene un período, por ejemplo:

- El número pi: π
- El número de oro: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- La raíces de índice par de números naturales cuyos resultados no son naturales. *Ejemplo*: $\sqrt{2}; \sqrt{6}; \sqrt[4]{8}$; etc.
- Las raíces de índice impar de números enteros cuyos resultados no son enteros. *Ejemplo*: $\sqrt[3]{7}; \sqrt[5]{-2}$; etc.

Por tanto:

➢ Los números irracionales no se pueden expresar como una fracción o como un cociente de dos enteros.

Para obtener un número irracional, es suficiente escribir un número cuyas cifras decimales sean infinitas y no presenten periodicidad.

Por *ejemplo*: 3,515511555111555551111155555511111.......

La unión del conjunto **Q** de números **racionales** y el conjunto de números **irracionales** es el conjunto $\Re$ de los números **reales**. Este conjunto puede representarse mediante una recta, llamada **recta real**. Cada punto de esta recta representa n número real, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta. Por ello, con los números reales se completa la recta numérica.

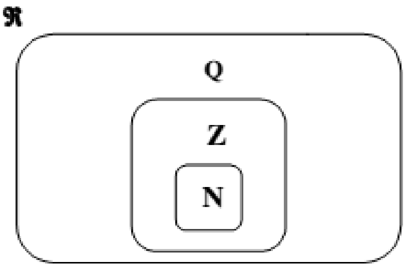
- Las propiedades de $\Re$ son:

1. Es **infinito** (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Entre dos números reales existe siempre un número infinito de reales. Se dice que el conjunto de números reales es **denso**.
4. Ningún número real tiene sucesor ni antecesor.
5. El conjunto $\Re$ es un conjunto totalmente ordenado por la relación menor o igual.
6. Es un conjunto **continuo**.

Hemos visto a los números naturales, enteros, racionales y reales. Un número natural es también entero, y un número entero puede escribirse como número racional utilizando una fracción que tenga un 1 en el denominador.

$$\text{Si } m \text{ es entero, entonces } \frac{m}{1} = m \text{ es racional}$$

Tenemos así dos grandes grupos de números: los racionales y los irracionales. Estos dos grandes grupos forman el conjunto de los números reales.



Los números reales tampoco son la solución a todas las ecuaciones (como, por ejemplo $x^2 + 1 = 0$), sin embargo nos aportan la estructura necesaria para comenzar a trabajar con situaciones matemáticas en las que utilizaremos las operaciones y sus propiedades definidas en los distintos conjuntos numéricos que describimos anteriormente.

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de falsedad, justifica tu respuesta:

a) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=5\sqrt{6}$ ....

b) $\sqrt{2}=\frac{1414}{1000}$ ....

c) $\sqrt{2}\,.\sqrt{2}=1{,}99396$ ....

d) El producto de dos números irracionales es siempre otro número irracional..........

e) El cuadrado de un número irracional siempre es un número racional..........

f) El producto de un entero por un irracional es un número irracional..........

1.2.5. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos surgen por la necesidad de resolver situaciones como la que plantea la siguiente ecuación:

$x^2 + 1 = 0$

$x = \sqrt{-1} \notin \Re$

Situaciones como la presentada requieren la ampliación de $\Re$ para dar respuesta a, por ejemplo, el valor de x ($x = \sqrt{-1}$) que resulta de la ecuación planteada. Tal ampliación origina el conjunto de los números complejos **C**.

Antes de definir números complejos, para que puedas comprender mejor, recordamos qué entendemos por par ordenado de números reales:

Par ordenado son dos elementos dados en un cierto orden. En símbolos: (a, b), dónde a se llama primera componente y b segunda componente. Por ejemplo: (3, -5).

Observar que (a, b) ≠ (b, a); es decir que si cambiamos el orden de las componentes estamos en presencia de dos ***pares ordenados*** distintos.

- **Número complejo** es todo par ordenado de números reales.

C = $\{(a, b) \,/\, a\in\Re \wedge b\in\Re\}$. (El símbolo $\wedge$, es un conectivo lógico que tiene el mismo significado que la conjunción “y” en el lenguaje coloquial).

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

- La notación usual es z = (a, b) donde a (primera componente) se denomina **parte real** de z y b (segunda componente) se denomina **parte imaginaria**.

- Un número complejo también se puede expresar en forma binómica: **z = a + bi**. El complejo z = (-2, 3) expresado como par ordenado en forma binómica sería

$$z = -2 + 3i$$

- Al número i se llama **unidad imaginaria** que cumple: $\boxed{i^2 = -1}$

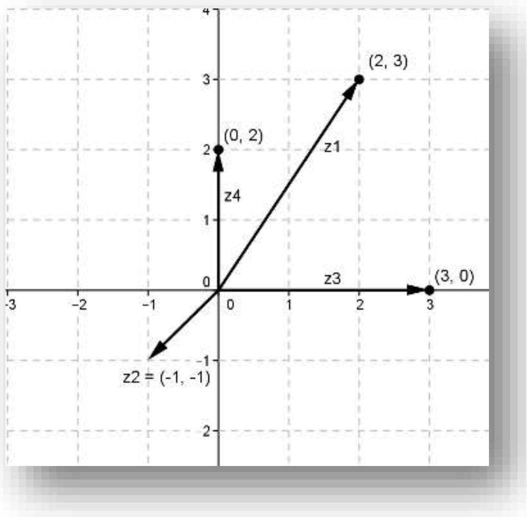
- Si la parte real es nula, el número complejo es **imaginario puro**.

- Si la parte imaginaria es nula, el número complejo es un **número real**.

- El conjunto $\Re$ está incluido en el conjunto **C**. (¿Cómo justificarías esta última afirmación?)

- El número complejo a + bi se representa en el plano mediante el punto de coordenadas (a, b). El eje horizontal se llama **eje real**, y el eje vertical **eje imaginario**.

Ejemplos: $z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = 1 - i$ $z_3 = 3$ $z_4 = 2i$



- A cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.

- El eje real contiene únicamente los números reales, y el eje imaginario, únicamente los imaginarios puros.

- Dos complejos son conjugados si y sólo si tienen la misma parte real, y sus partes imaginarias son opuestas. *Ejemplo*: z = 2 + 3i y $\bar{z}$ = 2 – 3i.

1.3. OPERACIONES EN LOS DISTINTOS CONJUNTOS NUMÉRICOS. PROPIEDADES

Desarrollaremos a continuación las operaciones fundamentales y algunas de sus propiedades considerando los dos grandes grupos de números: los racionales y los irracionales.

1.3.1. Adición y Sustracción de Números Racionales

Para sumar o restar fracciones de igual denominador, el resultado es otra fracción de igual denominador que las dadas, y cuyos numeradores se obtienen sumando o restando los numeradores dados. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Cuando sumamos o restamos fracciones de distinto denominador, buscamos fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador. En símbolos:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{9}{3}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{16}{20} - \frac{30}{20} + \frac{25}{20} = \frac{11}{20}$$

1.3.2. Multiplicación y División de Números Racionales

Para multiplicar fracciones, hacemos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Para dividir fracciones, hacemos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \qquad (\text{con } c \neq 0)$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \qquad\qquad \frac{4}{7} \div \frac{3}{14} = \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{4 \cdot 14}{7 \cdot 3} = \frac{8}{3}$$

1.3.3. Potenciación y Radicación de Números Racionales

Si p es un número racional y k un entero positivo; $p^0 = 1$ si $p \neq 0$; $p^1 = p$

$$p^k = \underbrace{p\,.\,p\,.\,p \ldots p}_{\text{k factores}}$$

$$p^{-k} = \underbrace{\frac{1}{p}\frac{1}{p}\ldots.\frac{1}{p}}_{\text{k factores}} \text{si p } \neq 0$$

Si p es un número racional y n un número natural;

$$\sqrt[n]{p} = q \Leftrightarrow q^n = p$$

Cuando realizamos las operaciones con números (sumamos, restamos, multiplicamos, etc.) hay ciertas reglas que debemos respetar; a este conjunto de reglas las denominamos propiedades. Conocer estas propiedades y manejarlas con soltura es importante.

No vamos a exhibir en este cuadernillo una lista exhaustiva de propiedades sino sólo aquellas que se utilizan con frecuencia y se olvidan con facilidad. En caso de "olvidos" de propiedades que no figuran aquí deberías recurrir a un texto del nivel secundario para consultar al respecto.

Se consideran a, b, c números que pertenecen a $\mathfrak{R}$ (esto significa que también se las propiedades en los otros conjuntos numéricos porque $\mathfrak{R}$ los incluye).

1) a + b = b + a — conmutatividad de la suma

2) a · b = b · a — conmutatividad del producto

3) c (a + b) = c a + c b — distributividad del producto respecto de la suma

4) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ — distributividad del cociente respecto de la suma

Sin embargo no hay una propiedad distributiva si la suma está en el denominador, es decir

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Por ejemplo: $\frac{6}{3+1} = \frac{6}{4} = 1{,}5$ y no es igual a $\frac{6}{3} + \frac{6}{1} = 8$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

1.3.4. Propiedades de las Operaciones sobre Igualdades

1) Si a = b entonces a + c = b + c

2) Si a = b entonces a · c = b · c

3) Si a = b y c ≠ 0 entonces

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

4) Si a b = 0 entonces a = 0 ó b = 0.

Veamos una aplicación. Resolver la ecuación:

$$\frac{2}{3} \cdot (x - 1) = x + 1$$

Comenzamos multiplicando ambos miembros por 3.

$$3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (\mathrm{x} - 1) = 3 \cdot (\mathrm{x} + 1)$$

2 (x – 1) = 3 (x + 1)	distribuimos
2x – 2 = 3x + 3	sumamos 2 en ambos miembros
2x = 3x + 3 + 2	restamos 3x en ambos miembros
-x = 5	dividimos por –1 en ambos miembros
x = -5	es la solución

1.3.5. Reglas de Signos

1) $-(-a) = a$
2) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$
3) $(-1) \cdot a = -a$

Y finalmente una regla importante que nos conviene tener en cuenta cuando operamos con fracciones:

4) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

1.3.6. Algunas Propiedades de la Potenciación y la Radicación

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Producto de potencias de igual base

2)
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ Potencia de otra potencia

3)
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ Propiedad distributiva de la potenciación respecto del producto y cociente

De estas propiedades se deduce que:

4)
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ Cociente de potencias de igual base

<u>No</u> existe la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la suma o la resta, es decir: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$ y $(a - b)^n \neq a^n - b^n$.

Ejemplo: $(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$ mientras que $12 + 2^2 = 5$.

Una diferencia de cuadrados se factoriza así: $a^2 - b^2 = (a - b).(a + b)$ en tanto que el cuadrado de un binomio se resuelve de esta forma:

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Si la operación es la radicación, algunas propiedades son:

1) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Bien, es hora de comenzar la ejercitación donde utilizarán las operaciones y propiedades desarrolladas hasta aquí.

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

1.3.7. Módulo de un Número Real

El módulo o valor absoluto de un número real x se simboliza $|x|$ yse define como:

$$\text{Si } x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$
$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

Ejemplos:

a) $|2{,}5| = 2{,}5$

b) $|-2{,}5| = -(-2{,}5) = 2{,}5$

Otra forma de expresar el módulo de un número real x es: $|x| = \sqrt{x^2}$

Ejemplo: $x^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{36} \Rightarrow |x| = 6 \Rightarrow$ x = 6 ó x = - 6

Desde el punto de vista geométrico, el valor absoluto de un número se puede interpretar, en la recta real, como la distancia entre ese número y el 0.

1.3.8. Operaciones con Radicales

1.3.8.1. Simplificación

Si **n** es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$. Si **n** es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|$

Si el índice y el exponente del radicando tienen un divisor común mayor que 1, se simplifican dividiéndolos por ese divisor común. En caso de que éste sea par se toma el valor absoluto del radicando.

Ejemplo: $\sqrt[3]{7^6} = 7^2 \sqrt[4]{|-5|^6} = \sqrt{|-5|^3}$

1.3.8.2. Adición y Sustracción:

- **Radicales semejantes**: Son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Al sumar o al restar radicales semejantes, se obtiene una expresión de un solo término.

Ejemplo: $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

- Se pueden **extraer del radical** todos los factores cuyos exponentes sean mayores o iguales que el índice. Para ello, se factoriza el radicando, se descomponen los factores en forma conveniente, se distribuye la raíz con respecto al producto y se simplifica.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{4000} = \sqrt[3]{2^5.5^3} = \sqrt[3]{2^3.2^2.5^3} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[3]{5^3} = 2\,.\,5\,.\sqrt[3]{2^2} = 10\,.\sqrt[3]{2^2}$$

Para sumar o para restar radicales, se hace así:

- Si los radicales son números compuestos, se factorizan.
- Se simplifican todos los radicales posibles.
- Se extraen todos los factores posibles de cada radical.
- Si hay radicales semejantes, se agrupan en un solo término.
- La suma o la resta de radicales no semejantes se deja expresada.

Ejemplo: $\sqrt[4]{9} - \sqrt{48} + \sqrt{8} = \sqrt[4]{3^2} - \sqrt{2^4.3} + \sqrt{2^3} = \sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} =$

$$= -3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

1.3.8.3. Multiplicación y División

- Si los **radicales tienen igual índice**, se aplican estas fórmulas

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

- Radicales de índices distintos: se buscan radicales equivalentes de modo tal que todos tengan el mismo índice.

Ejemplo: $\sqrt[3]{3}\,.\sqrt{2}\,.\sqrt[4]{125} = \sqrt[12]{3^4}\,.\sqrt[12]{2^6}\,.\sqrt[12]{(5^3)^3} = \sqrt[12]{3^4\,.2^6.5^9}$

1.3.8.4. Racionalización de Denominadores

Consiste en transformar una expresión que contiene radicales en su denominador en otra equivalente, cuyo denominador sea racional.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{2}$

c) $\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} . \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

1.3.8.5. Exponentes Racionales

Para cualquier número n natural mayor que 1 y a ≥ 0 se cumple que:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Las potencias de exponente racional cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

Para operar, en algunos casos conviene expresar los radicales como potencias y trabajar con estas aplicando sus propiedades.

Ejemplo: $\sqrt{5} . \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{2}} . 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{6}}$

1.4. LOGARITMO DE UN NÚMERO REAL.

El logaritmo en base **b** de un número **a** es el número **c**, si **b** elevado al exponente **c** da como resultado **a**.

En símbolos:

$$\log_b a = c \iff b^c = a$$

b es la **base** del logaritmo y debe ser un número real positivo y distinto de 1.

a es el **argumento** del logaritmo y debe ser un número real positivo.

y = $\log_2 x$, se lee: “*logaritmo en base 2 de x*”

Ejemplos:

a) $\log_2 4 = 2$ dado que $4 = 2^2$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ dado que $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

1.4.1. Propiedades de los Logaritmos

1) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

2) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3) $\log_b(x^y) = y \log_b x$

4) $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

1.4.2. Cambio de base

Supongamos que queremos averiguar $\log_3 243$ utilizando la calculadora científica.

Entonces, podemos proceder así: (pensar y completar)

- Usamos la definición de logaritmo: $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243$
- Aplicamos logaritmos decimales (base igual a 10) a ambos miembros. Resulta: $\log 3^x =$ … … …
- Aplicamos la propiedad para "bajar" el exponente: x ……. = …………
- Despejamos x = ……………….; pero x = $\log_3 243 = \frac{\log 243}{\log 3} = \cdots$

Este procedimiento se llama cambio de base, y nos permite cambiar la base b de un logaritmo por otra más conveniente (hemos elegido base 10, pero podríamos haber elegido cualquier otra).

Si llamamos w a la base elegida, podemos aplicar directamente la siguiente fórmula:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log_w a}{\log_w b}}$$

Así podemos obtener con la calculadora científica el logaritmo de un número en cualquier base. La nueva base que elegimos será 10 o e.

Por *ejemplo*: $\log_3 230 = \frac{\log 230}{\log 3} =$ ……….. Este logaritmo se resuelve usando la calculadora científica.

Una cuestión de notación…

- $log_b^n(a) = [\log_b(a)]^n$
- Cuando leamos log a sin hacer referencia a la base b se entenderá que nos referimos a la base 10, es decir, b= 10. Las calculadoras toman esta conversión.

1.5. OPERACIONES EN C.

1.5.1. Suma y resta

Para sumar y restar números complejos se suman o restan las partes reales y las partes imaginarias. Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$:

Entonces, su suma será el nuevo número complejo:

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

$$\mathbf{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\, i}$$

Y la resta o diferencia entre ambos:

$$\mathbf{z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\, i}$$

1.5.2. Multiplicación

En este caso basta con tener presente que cada número complejo es un binomio, por lo tanto es válida la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma (o resta), por lo tanto, siz_1 = a + bi y z_2 = c + di, tendremos:

$z_1 . z_2$ = (a + bi) (c + di) = ac + ad i + bc i + bd i^2, pero recordemos que: $i^2 = -1$, por lo que $z_1 . z_2$ =ac + ad i + bc i - bd , luego, reordenando nos queda:

$$\mathbf{z_1 . z_2 = ac - bd + (ad + bc)i}$$

que es el producto de la operación.

1.5.3. División

Para poder dividir dos números complejos, debemos valernos de una propiedad de los números reales, que establece que si en toda fracción multiplicamos el numerador y el denominador por un número real distinto de cero, dicha fracción no cambia.

Esta propiedad se extiende al campo de los números complejos, de tal manera que para dividir dos complejos, multiplicamos el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor, es decir, si z_1 = a + bi y z_2 = c + di, el procedimiento general sería:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \bar{z}_2}{z_2 . \bar{z}_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac + a(-di) + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{(ac+bd) - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

y la expresión correcta del número complejo cociente sería:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2}\, i}$$

Ejemplo: Dados los complejos $z_1 = 2 - 4i$ $\quad z_2 = -1 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-4i}{-1+3i} = \frac{(2-4i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-2-6i+4i-12}{(-1)^2+(3)^2} =$$

$$\frac{-14-2i}{10} = -\frac{14}{10} - \frac{2}{10}i = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. Representar los siguientes números en la recta numérica: $\frac{3}{5}$; -0,6; $\frac{8}{4}$; $\frac{0}{3}$; $-\frac{4}{2}$

2. Ordenar de menor a mayor los números : $0{,}\widehat{6}$; $-\frac{8}{5}$; $-\frac{3}{2}$; 0,59; -1 ; $\frac{6}{10}$

3. Indicar si las afirmaciones dadas son verdaderas (V) o falsas (F). Justificar.

a) $Q \cup Z = Q$
b) $Z \cap N = Z$
c) $Z \cup N = Z$
d) $R \cup Z = Q$
e) $N \cup Q = R$
f) $3 < \pi < 4$
g) $1 < \frac{\pi}{2} < 1{,}2$
h) $6{,}5 < 2\pi < 6{,}55$
i) $\pi \geq 3{,}1415$

4. ¿Verdadero o falso? Justificar.

a) Entre 21 y 22 no hay números enteros (excluidos 21 y 22)

b) Entre 2 y 3, sin considerar 2 y 3, hay infinitos números racionales

c) Entre -2,5 y -2,6 hay infinitos números reales

d) 4,33333333333... es un número irracional.

5. Escribir como fracción:

a) 0,57 b) 8,931 c) 1,666… d) $2{,}4\widehat{23}$ e) $1{,}\widehat{23}$ f) 5

6. Resolver sin pasar a fracción:

a) $(0{,}5 + 2{,}\hat{3} - 1{,}\hat{1})\ 10$ b) $(-1{,}2\hat{5} - 3{,}4 + 0{,}\hat{1})\ 100$

7. Notación científica

Recordar: Un número que se puede expresar en la forma $\boldsymbol{a \times 10^n}$, donde $1 \leq a < 10$, se dice que está escrito en *notación científica*. Por ejemplo, el número 2450000000000000, se puede escribir como $2{,}45 \times 10^{15}$. El número *a* es un decimal cuya parte entera tiene una sola cifra distinta de cero.

Escribir en notación científica:

a) -5900000000000
b) 27830000000

c) 0,000000000000746
d) -0,000000051

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

8. Escribir en forma decimal:

a) $2{,}65.10^{9}$ b) $1{,}9.10^{-4}$

9. a) Expresar el resultado de la siguiente operación en notación científica:

$$7{,}45.10^{12}\ .\ 0{,}0000005625$$

b) La masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente:
0,0000000000000000000000017 gramos. Expresar este número en forma científica.

c) La masa de un electrón es aproximadamente $9{,}1 \times 10^{-31}$ kilogramos. Expresar este número en forma decimal.

d) Las dinámicas poblacionales de muchos peces se caracterizan por porcentajes de fertilidad extremadamente altos entre adultos y porcentajes de supervivencia muy bajos entre los jóvenes. Un lenguado maduro puede poner hasta 2,5 millones de huevos, pero sólo 0,00035% de la prole sobrevive a la edad de 3 años. Usar la forma científica para aproximar el número de descendientes que viven hasta la edad de 3 años.

10. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas?

a) $0{,}0025.10^{2} = 2{,}5.10^{-1}$

b) $0{,}0025.10^{2} = 0{,}25 \times 10^{0}$

c) $75 = 7{,}5.10^{0}$

d) $0{,}000056 = 5{,}6\ .\ 10^{-4}$

e) $2EXP\text{-}3 = 2\ .\ 10^{-3}$

11. Resolver los siguientes ejercicios.

a) $-2[(3^{138}:3^{137}+2):5-1]+\sqrt[3]{-125}$

b) $(-2)^{30}(-2)^{5}:(-2)^{21}+\sqrt[4]{(-3)^{2}9}-24:[2(-3)-6]$

c) $\dfrac{4-ab-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{2ab}$

d) $-\sqrt[3]{-24-3}\ -\ (1+5)^{2}-5^{2}+\sqrt{10^{4}}\ :2$

e) $(-5)^{7}:(-5)^{3}:(-5)+\{[(-5)^{2}]^{0}\}^{4}-(-5)(-5)^{2}$

f) $\sqrt[4]{2^{3}\,2}-\sqrt[5]{(-2)^{6}:(-2)}+\sqrt[3]{(-4)^{2}(-4)}$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

g) $3+\dfrac{\frac{6}{5}:3+\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}:\frac{5}{6}-\frac{1}{4}}$

h) $\sqrt{\dfrac{1}{16}}\sqrt[3]{-27}:\dfrac{3}{4}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

12. Analizar las siguientes igualdades. ¿Se verifican? En caso negativo, escribir la expresión correcta.

a) $(a+b)^{-2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

b) $(b^2-b)^2=b^2(b^2-2b-1)$

c) $(a-\sqrt{3})^2=a^2-3$

d) $\sqrt{3a}=\sqrt{3}\sqrt{a}$; $\sqrt{3}+\sqrt{a}=\sqrt{3+a}$

13. Verificar las igualdades

a) $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{-81}=3\sqrt[3]{-3}$

14. Efectuar los cálculos siguientes, teniendo en cuenta el ejercicio anterior y sin aproximar los números irracionales.

a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{18}$ b) $\left(\sqrt{8}+3\right)^2$

c) $\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{24}+\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{3}$ d) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2$

15. Aplicar las propiedades convenientes para resolver los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{(-2)^5(-2)}}$ b) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{36}$

c) $\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{108})$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{0,1\cdot 10^5}\sqrt[4]{0,1\cdot 10^5}}$

e) $\sqrt[5]{5:\sqrt{5}}$ f) $\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{16}}}$

16. Verificar las siguientes igualdades:

a) $\left(a+\sqrt{8}\right)^2=a^2+6(a\sqrt{2}+3)$ b) $\dfrac{26}{5}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{\dfrac{2}{125}}=$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

17. Obtener otra expresión equivalente con denominador racional.

a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{16}}$ c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$

18. Indicar en cuáles de las siguientes expresiones no es posible racionalizar el denominador:

a) $\dfrac{3}{\phi}$, siendo ϕ el número de oro b) $\dfrac{1}{\pi}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ d) $\dfrac{-3}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

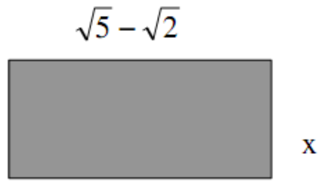
19. Considerar los números $x = 2\sqrt{3}$ e $y = -2+\sqrt{3}$, realizar los siguientes cálculos y escribir los resultados sin radicales en el denominador:

a) x^{-1} b) y^{-2} c) $y^{-1} - x^{-1}$ d) $(x + y)^{-1}$ e) $x + x^{-1}$

20. Hallar la medida en cm del perímetro de un triángulo equilátero de $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ cm. De lado y expresar sin radicales en el denominador.

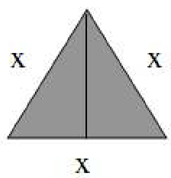
21. Todas estas figuras tienen área igual a 1. Hallar las incógnitas indicadas. Expresar todos los resultados sin radicales en el denominador.

a)

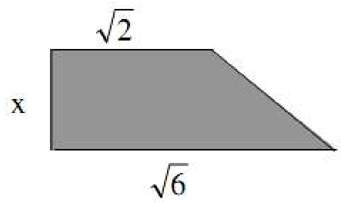


altura del triángulo: $\sqrt{7}$

b)



c)



22. Resolver aplicando las propiedades de la potenciación.

a) $2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{-1}{2}} \left[2^{\frac{1}{5}} : 2 \right]^{\frac{5}{4}}$ b) $\left[0{,}1^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{9}{5}} : 10 : 100^{\frac{-11}{10}}$

23. Escribir en forma de radical las siguientes expresiones:

a) $4^{\frac{1}{3}}$ b) $7^{\frac{-3}{5}}$ c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ d) $0{,}4^{\frac{-1}{3}}$

24. Expresar en forma de potencias los siguientes radicales:

a. $\sqrt[3]{6}$ b. $\sqrt[10]{2^5}$ c. $\sqrt[3]{\sqrt{81}}$ d. $\sqrt{7}\,\sqrt{7}$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

25. Expresar las medidas con potencias de exponente racional:

a) El volumen de un cubo de $7\sqrt{7}$ cm. de arista.

b) La diagonal de un cuadrado de $\sqrt[3]{4}$ cm. de perímetro.

26. Simplificar todo lo posible la expresión. Luego, hallar su valor para $x = 0{,}0001$.

$$\left[\left(x^{\frac{-2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}\right]^{\frac{5}{4}}$$

27. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) No existen logaritmos de números negativos.
b) Los logaritmos están definidos para bases positivas.
c) Las potencias de un número positivo son todas positivas.

28. Hallar y verificar los siguientes logaritmos aplicando la definición.

a) $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$ b) $\log_2\sqrt{2}$ c) $\log 0{,}001$ d) $\log_{\sqrt{3}} 9$

e) $\log_{0,5} 4$ f) $\log_8\sqrt[5]{64}$ g) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ h) $\log_3\sqrt[4]{\frac{1}{9}}$

i) $\log_3 0$ j) $2^{\log_2 6}$ k) $\log_2 4^{0,5}$ l) $25^{\log_{25} 8}$

m) $\log_2 2$ n) $\log_2\frac{2^5\sqrt{2^3}}{2^3}$ o) $\log_{1/2}\left(\frac{1}{16}\right)$ p) $\log_{a^2} a^5$

29. Completar con $=$ ó $\neq$ según corresponda en cada caso y justificar:

a) $\log_3(9+3+27)$.............................. $\log_3 9+\log_3 3+\log_3 27$

b) $\log_2 5+\log_2 8-\log_2 40$..................... 0

c) ln 2 + ln 5 .... ln(2 · 5)

d) $\log_2(9-5)$ .... $\frac{\log_2 9}{\log_2 5}$

e) $\log_2(32\ \sqrt[5]{4})$ 27/5

f) (log 625)/4 .... log 5

g) log 98 – log 4 .... log(24,5)

30. Indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

a) $(\log_3 4)^{1/2} = \frac{1}{2}\log_3 4$ b) $\log_3 4^{1/2} = \frac{1}{2}\log_3 4$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

c) $\log_3(-x) = -\log_3 x$

d) $\log_3 x^{-1} = -\log_3 x$

e) $\log_3 2 / \log_3 5 = \log_3 2 - \log_3 5$

f) $\log_a b = 1/\log_b a$

g) $\log_4 2 = 1/2$

h) $\log_4 2 = -1/2$

i) $3^{\log_3 2} = 3$

j) $3^{\log_3 2} = 2$

31. Resolver sin usar calculadora

a) $\frac{1}{2}\log_5 3 - \log_5 \sqrt{75}$

b) $\log_2 \sqrt{2} - \frac{1}{3}\log_2 64 - \frac{1}{2}\log_2 8$

c) $\log_a a^2 - \log_4 (0{,}25)^2$

d) $\log_{1/2} 4 + b^{-1} \log_{(a+b)} (a+b)^{3b}$

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(a - 5/4\right) - \log_{\frac{1}{2}}(2a - 10) + a^{-1}\log_{\frac{1}{2}} 2^a =$

f) $\log_8 2\ \log_2(4+4) + \left(7^{\log_7 x} / \log_3 3^x\right) - ln(e^2)$

32. Representar gráficamente los siguientes números complejos:

$z_1 = (2/3) - i$ $\quad z_2 = 4$ $\quad z_3 = 6\,i$ $\quad z_4 = -2 + (3/5)\,i\,\bar{z}_1$

33. Con los mismos números complejos representados en el punto anterior, efectuar las siguientes operaciones:

a) $(z_1 - z_2)z_3$ b) $z_1/z_4 + z_3$ c) $z_4^2 - z_2$ d) $z_3 . z_1^{-1}$ e) $z_4\,\bar{z}_4$

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Se sabe que a + b = 45 y que b es el cuádruplo de a; calcule, sin recurrir a la calculadora, el valor de:

a) a y b

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{3} - \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{a+b}$

c) $\log_5\left(\frac{a+b}{a}\right) - \log_a\left(\frac{5}{a+b}\right)$

2. Indicar si las igualdades son correctas: a) $-4^2 + 5 = 21$ b) $(3a + c)/(a + c) = 3$

3. ¿Qué valor debe tomar k para que $z = (2k - 1) + 5\,i$ sea un imaginario puro?

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

UNIDAD 2: FUNCIONES POLINÓMICAS

2.1. POLINOMIOS

Una expresión matemática constituida por un conjunto finito de variables (no determinadas o desconocidas) y constantes (números fijos llamados coeficientes), utilizando únicamente las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación, así como también exponentes enteros positivos en las variables, recibe el nombre de **polinomio**, que si tiene una sola variable x, es un **polinomio en la variable x**. En términos más precisos, es una relación n-aria de monomios, o una sucesión de sumas y restas de potencias enteras de una o de varias variables indeterminadas. Por ejemplo, la expresión $5x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ es un polinomio de tercer grado en la variable x, porque la tercera es la máxima potencia de la variable x que aparece en él. Los términos de este polinomio son: $5x^3$, $7x^2$, $4x$ y -12. Los coeficientes son 5, 7, 4, y -12.

En un polinomio los números expresados mediante cifras o letras son números reales y están relacionados a través de las operaciones: suma, resta, producto y potencia de exponente natural. Es decir todos los exponentes de las variables de un polinomio deben ser enteros no negativos. Por consiguiente, las expresiones $x^3 + x^{1/2}$ y $x^{-2} + 1$ **no son polinomios**, porque contienen exponentes fraccionarios y negativos (en su variable).

Cualquier constante diferente de cero, como 7, se clasifica como un polinomio de grado cero, ya que: $7 = 7x^0$. También al número cero nos referimos como una constante polinomial, pero no se le asigna grado alguno.

Los polinomios que tienen sólo uno, dos o tres términos reciben nombres especiales:

Números de términos	Nombre del polinomio	Ejemplo
uno	Monomio	$17\,x^5$
dos	binomio	$2x^3 - 6x$
tres	trinomio	$x^4 - x^2 + 2$
cuatro	cuatrinomio	$5x^6 - 2x^3 + 3x^2 - x$

La variable x en el polinomio representa cualquier número real. Por este motivo expresiones como 2x, x + 3 y $x^2 + x$ representan también números reales, cuyo valor depende del que tome x. Por ejemplo, si x = 3 los valores de las expresiones dadas serán 6, 6 y 12 respectivamente.

Ya que cada símbolo de un polinomio es un número real, se pueden usar las propiedades del sistema de los números reales para operar con ellos.

En general:

Un polinomio de grado n en la variable x se puede escribir en cualquiera de siguientes formas estándar:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Donde los coeficientes a_n, a_{n-1}, . . . , a_1, a_0 son números reales, y los exponentes son enteros no negativos. El coeficiente principal es $a_n \neq 0$, y a_0 es el término constante.

Cabe aclarar que también se puede considerar que a_0 es el coeficiente del término $a_0 x^0$.

2.2. OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

2.2.1 Suma y resta de polinomios

Cuando se suman o se restan dos polinomios, el resultado es otro polinomio.

P(x) + Q(x) = S(x)

Al efectivizar dichas operaciones se suman o restan los coeficientes respectivos de iguales potencias de la variable, es decir se agrupan los términos semejantes (propiedad asociativa y conmutativa), para operar con ellos, o bien, se aplica la propiedad distributiva.

Por ejemplo, sean los polinomios: $P(x) = x + 2x^2 - 1$ y Q(x) = 3x + 2, hallar la suma de los mismos.

Solución: P(x) + Q(x) =

$= (2x^2 + x - 1) + (3x + 2)$ se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,

$= 2x^2 + x - 1 + 3x + 2$ se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,

$= 2x^2 + (x + 3x) - 1 + 2$ se suman los coeficientes de las potencias iguales de x.

$= 2x^2 + 4x + 1$

¿Por qué no es válido sumar los términos no semejantes? Es decir, suma de términos de distintos grados, como ser$2x^2$ y x^4?

Veamos otro ejemplo:

Dado los Polinomios $P(x) = 4x^3 - 10x^2 + 5x + 8yQ(x) = 12x^2 - 9x - 1$, efectuar la resta de los mismos.

Solución: P(x) - Q(x) =

$= (4x^3 - 10x^2 + 5x + 8) - (12x^2 - 9x - 1)$ se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,

$= 4x^3 - 10x^2 + 5x + 8 - 12x^2 + 9x + 1$ se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

$= 4x^3 + (-12x^2 - 10x^2) + (5x + 9x) + (8 + 1)$

se suman los coeficientes de las potencias iguales de x, o bien se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$= 4x^3 + (-12 - 10)\,x^2 + (5 + 9)x + (8 + 1)$

$= 4x^3 - 22\,x^2 + 14\,x + 9$

Intentar lo siguiente

Dado los siguientes polinomios

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2xQ(x) = - 2x^2 + 3x + 1/2$$
$$R(x) = 5x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3S(x) = 5x^4 + 2x^2 - 2x + 4$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) P(x) + S(x) b) R(x) − P(x) c) S(x) − S(x)

d) Q(x) + P(x) e) R(x) − S(x)

¿Qué se puede decir del grado del polinomio obtenido al sumar o restar dos polinomios?

2.2.2. Producto entre polinomios

Cuando se multiplican dos polinomios el resultado es otro polinomio, obtenido de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y las leyes de los exponentes.

P(x) Q(x) = T(x)

Veamos a través del siguiente ejemplo: Sean P(x) = 2x − 3 y $Q(x) = x^2 + 2x - 1$ Hallar P(x) Q(x)

Cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo:

$$(2x - 3) \quad . \quad (x^2 + 2x - 1)$$

Solución:

P(x) Q(x) $= 2x(x^2) + (2x)(2x) + (2x)(-1) + (-3)(x^2) + (-3)(2x) + (-3)(-1) =$

$= 2x^3 + 4x^2 - 2x - 3\,x^2 - 6x + 3$

se asocian términos semejantes y se encuentra el resultado final:

$$P(x)Q(x) = 2x^3 + (4x^2 - 3x^2) + (-2x - 6x) + 3 = 2x^3 + x^2 - 8x + 3$$

Intentar lo siguiente

Dados los siguientes polinomios

P(x) = – 3x $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

$R(x) = x^2 - 3x + 5S(x) = 2x^3 - 3x$

Realizar las siguientes operaciones:

a) P(x) S(x) b) R(x) S(x) c) Q(x) R(x)

¿Cómo se calcularían las siguientes potencias: $[S(x)]^2$; $[P(x)]^3$; $[Q(x)]^2$?.

2.2.3 Productos notables

Resolver los siguientes productos entre binomios:

a) (A + B) (A + B) b) (A − B) (A − B)

c) (A + B) (A − B) d) $(A+B)^2\,(A+B)$

donde A y B representan monomios cualesquiera.

¿Qué se puede decir de los polinomios obtenidos? Caracterizarlos.

A continuación se ejemplifica lo solicitado en el ítem d) $(A+B)^2\,(A+B)$

Por definición de potencia podemos escribir:

$(A+B)^2\,(A+B)$ = [(A + B) (A + B)] (A + B)

$= [A^2 + 2AB + B^2]\,(A + B)$

$= A^2\,(A + B) + 2\,AB\,(A + B) + B^2\,(A + B)$

$= A^3 + A^2B + 2\,A^2B + 2\,AB^2 + AB^2 + B^3$

$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

El polinomio obtenido es un **cuatrinomio cubo perfecto**. Entonces, encontrar el cubo de un binomio equivale a resolver cualquiera de los siguientes productos:

$(A + B)^3 = (A+B)\,(A+B)\,(A+B) = (A+B)^2\,(A+B)$

$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

Resolver: a)$(4x - 5)^3$ b) $(2x^2 + x^3)^2$ c) $(4x + x^3)\,(4x - x^3)$

2.2.4 División de polinomios

La división de polinomios se realiza con un algoritmo similar al de la división entera.
Recordemos el algoritmo de la división entera

$$\begin{array}{l|l} D & \;\; d \\ \cline{2-2} R & \;\; C \end{array}$$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

Sabemos que en este algoritmo, el divisor (d) nunca es cero y el resto es menor que el divisor y se cumple que D = d.C + R. Es decir, que el dividendo (D) es igual al divisor (d) por el cociente (C) más el resto (R).

Para que la división entre polinomios sea otro polinomio, el divisor debe ser de grado igual o menor que el grado del dividendo.

Luego, en el caso de la división de polinomios, se cumple:

$$\boxed{P(x) = Q(x)\,C(x) + R(x)}$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

Dividir el polinomio $P(x) = 3x^3 – x^2 – 2x + 6$ por $Q(x) = x^2 + x$

Solución:

$$\begin{array}{lrl}
\text{Dividendo } [P(x)] \rightarrow & 3x^3 - x^2 - 2x + 6 & \underline{|\, x^2 + x\quad} \rightarrow \text{ Divisor } [Q(x)] \\
& - \underline{3x^3 - 3x^2 \qquad\qquad} & 3x - 4 \quad \rightarrow \text{ Cociente } [C(x)] \\
& -4x^2 - 2x + 6 & \\
& \underline{4x^2 + 4x \quad .} & \\
& 2x + 6 & \rightarrow \text{ Resto } [R(x)]
\end{array}$$

El procedimiento es el siguiente:

1. Se escriben los polinomios dividendo y divisor ordenados en forma decreciente y completa, es decir que si faltara algún grado, el mismo se completa con coeficiente cero.

2. Se divide $3x^3$ (el primer término del dividendo) por x^2 (el primer término del divisor), para obtener 3x (el primer término del cociente). Se dividen los coeficientes y se restan las potencias.

3. Se multiplica $x^2 + x$ (el divisor) por 3x y se obtiene $3x^3 + 3x^2$.

4. Se cambia de signo obteniéndose $-3x^2 - 3x$ y se coloca debajo de los términos correspondientes en el dividendo.

5. Se suma para obtener $-4x^2$, y se escriben a continuación los demás términos del polinomio dividendo, el polinomio obtenido se trata como el nuevo dividendo.

6. Se divide $-4x^2$(el primer término del nuevo dividendo) por x^2, se obtiene -4 (el segundo término del cociente).

7. Se multiplica x^2+ x por -4 y se suma el producto del nuevo dividendo cambiado designo. Este resultado, 2x + 6, representa el resto de la división debido a que es un polinomio de grado menor que el grado del divisor, por lo tanto la división está terminada.

Como el resto no es cero, el polinomio dividendo no es múltiplo del divisor. Según la relación de la división entera, el polinomio dividendo se podrá escribir como:

$$\underbrace{3x^3 - x^2 - 2x + 6}_{P(x)} = \underbrace{(x^2 + x)}_{Q(x)} \cdot \underbrace{(3x - 4)}_{C(x)} + \underbrace{(2x + 6)}_{R(x)}$$

Analicemos otro *ejemplo*:

Dados los polinomios $P(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ y $Q(x) = x^2 + 2$, efectuar la división: P(x):Q(x)

Solución:

$$\begin{array}{lrl} \text{Dividendo } P(x) & x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x - 8 & \big|\ \underline{x^2 + 0x + 2} \quad \textit{Divisor } Q(x) \\ & \underline{-x^4 - 0x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad} & \quad x^2 - 4 \\ & -4x^2 + 0x - 8 & \ \text{Cociente } C(x) \\ & \underline{4x^2 + 0x + 8} & \\ & \text{Resto } R(x): \qquad 0 & \end{array}$$

Como en este caso el resto es 0, el polinomio dividendo es múltiplo del divisor y la relación anterior se reduce a: P(x) = Q(x) C(x) poniendo en evidencia la posibilidad de escribir el polinomio dividendo como un producto de factores:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = (x^2 + 2)\,(x^2 - 4)$$

Intentar lo siguiente:

i) Usar el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios.

a) $(x^3 - x^2 - x + 10):(x^2 - 3x + 5)$

b) $(4x^3 - 5x^2 + x - 7):(x^2 - 2x)$

c) $(5x^2 + 7x + x^3 + 8):(x - 2)$

d) $(x^3 - 2x^2 - 13x + 6):(x + 3)$

ii) Verificar cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto: P(x) = Q(x) C(x) + R(x).

Analizar la validez de la siguiente afirmación:

"La expresión $\frac{P(X)}{Q(X)} = C(X) + \frac{R(X)}{Q(X)}$, representa el resultado de la división de los polinomios P(x) y Q(x)".

2.2.4.1 División de un polinomio por un binomio de la forma x − c

Cuando se realiza la división entera de un polinomio P(x) por un binomio de la forma x − c, donde c es un número real, puede ocurrir que el resto sea de grado cero o que sea el polinomio nulo. Por lo tanto, el resto es un número que se designará con R.

El siguiente teorema relaciona el resto R obtenido de la división de un polinomio P(x) por x − c y el valor del polinomio en x = c.

Teorema del resto: "Cuando un polinomio P(x) se divide por x – c, el resto Res el valor del polinomio en x = c, esto es, R = P(c)."

En efecto:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-c \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} P(x) = (x-c)\cdot C(x) + R \\ P(c) = (c-c)\cdot C(x) + R \end{array}$$

Luego P(c) = R

Por ejemplo: si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, es posible anticipar cuál será el resto de dividirlo por x – 1,ya que según el teorema se tendrá:

R = P(1) = $(1)^3 - 3(1)^2 + 4$ = 2

También se puede escribir P(x) en términos de x – 1 encontrando el cociente C(x) y utilizando la expresión de la división entera:

P(x) = (x – 1) C(x) + 2

Si P(c) = 0, entonces x = c se constituye en una raíz de P(x), quedando P(x) expresado como un producto, es decir P(x) está factorizado, y en este caso se tendrá:

P(x) = (x – c) C(x)

Así, si el divisor fuera x − 2, se tiene que P(2) = $2^3 - 3.2^2 + 4$ = 0,
por consiguiente x – 2será un factor de P(x) y podrá expresarse de la siguiente manera:

$$P(x) = (x - 2)\,(x^2 - x - 2)$$

Donde $C(x) = x^2 - x - 2$ es el cociente de la división, el cual puede obtenerse fácilmente mediante la regla de Ruffini.

A continuación se recuerda el algoritmo correspondiente a la regla de Ruffini:

1. En el primer renglón se escriben los coeficientes del dividendo (el cual debe estar completo y ordenado en forma decreciente). A la izquierda, sólo se escribe la raíz del divisor (el valor que lo anula).

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Los demás coeficientes se obtienen de la siguiente forma:

2. El coeficiente principal del dividendo (1) se copia abajo. Se lo multiplica por 2 y el resultado (2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (−3). Se suman −3y 2 y el resultado (−1) se escribe abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

3. El -1 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (– 2) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (0). Se suman 0 y – 2 y el resultado (−2) se escribe abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \end{array}$$

4. El -2 obtenido en el paso anterior reinicia el ciclo: se lo multiplica por 2 y el resultado (– 4) se escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo (4). Se suman 4 y – 4y el resultado (0) es el resto. Se escribe abajo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

El resto es 0. Los valores 1, -1 y -2 son los coeficientes del polinomio cociente:

$C(x) = x^2 - x - 2$, cuyo grado es una unidad menor que el del polinomio dividendo.

Recuerda que la Regla de Ruffini sólo se podrá aplicar en cocientes donde el divisor es de la forma x – c.

Conviene tener presente que:

Decir que P(c) = 0, equivale a decir que:
- (x – c) divide exactamente a P(x) o que P(x) es divisible por (x – c),
- P(x) podrá expresarse como el producto: P(x) = (x – c).C(x) donde C(x) es el polinomio cociente entre P(x) y x – c.

Intentar lo siguiente

Dadas las siguientes divisiones:

a)$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6): (x - 3)$ b) $(x^3 + 5x^2 - 7x + 8): (x - 2)$

c) $(2x^3 + x^2 - 3x + 7): (x + 1)$ d) $(x^3 + 27): (x + 3)$

i) Utilizar el Teorema del Resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

ii) Cuando sea posible, factorizarlo en término del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

2.3. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Ya se ha dicho que factorizar un polinomio significa escribirlo como un producto equivalente al mismo.

- Uno de los métodos básicos de factorizar es el inverso de multiplicar por un monomio: **factor común**.

Veamos este problema con un *ejemplo*:

El polinomio P(x) se puede factorizar extrayendo como factor común diversos factores. Dado:

$P(x) = 29x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2$ se podrán extraer por ejemplo: 3x, $6x^2$ o $4x^3$obteniéndose:

$P(x) = 29x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 3x\ (8x^8 - 6x^5 - 2x^3 + 30x)$

$P(x) = 29x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 6x^2\ (4x^7 - 3x^4 - x^2 + 15)$

$P(x) = 29x^9 - 18x^6 - 6x^4 + 90x^2 = 4x^3\ (6x^6 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{45}{2}x^{-1})$

Del análisis de lo hecho anteriormente se desprende que:

• es posible extraer distintos factores, no necesariamente los comunes,

• para asegurar que el polinomio dado pueda expresarse como el producto de dos polinomios, el grado del monomio extraído como factor común deberá ser a lo sumo, igual al grado del término de menor grado del polinomio.

Siempre se puede controlar que el producto que se obtuvo es correcto, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma algebraica en $\mathfrak{R}$.

- Otros recursos para factorizar están relacionados con los productos notables de binomios estudiados anteriormente.

A continuación se ejemplifica con algunos de ellos:

Polinomio	Expresión desarrollada	Expresión factorizada
Trinomio cuadrado perfecto	$A^2 + 2AB + B^2$ $A^2 - 2AB + B^2$	(A+B)(A + B) = $(A + B)^2$ (A-B)(A - B) = $(A - B)^2$
Cuatrinomio cubo perfecto	$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	(A+B)(A+B)(A+B) = $(A + B)^3$ (A-B)(A-B)(A-B) = $(A - B)^3$
Diferencia de cuadrados	$A^2 - B^2$	(A + B)(A − B)

Factorizar las expresiones anteriores resultó sencillo debido a que los polinomios involucrados eran "especiales", por ejemplo: un trinomio cuadrado perfecto, una diferencia de cuadrados; por lo tanto fue posible recurrir a las técnicas de factoreo estudiadas en el nivel medio.

A continuación presentaremos una herramienta útil al momento de transformar un polinomio cualquiera en producto de factores, el **Teorema del Factor**.

"Un polinomio P(x) tiene un factor x − c , si y sólo si: P(c) = 0"

Este teorema asegura que basta encontrar un valor de "c" que anule a P(x), para determinar uno de los factores del polinomio dado; en efecto, este podrá escribirse como P(x) = (x − c) C(x), donde

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

C(x) es el polinomio cociente, por estar asegurado que el resto de la división es cero (Teorema del resto).

Entonces, encontrando un valor de "c" que anule a P(x) tendremos asegurado que el binomio x – c será un divisor de P(x) y por lo tanto será posible iniciar la factorización del polinomio.

Factorizar completamente a P(x) implicará establecer la existencia de algún factor de C(x), el cociente de la división anterior. Este procedimiento deberá continuarse hasta que el último cociente hallado, no contenga ningún factor (no exista un valor de "c" que lo anule).

Ejemplo: Factorizar $P(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x$

Solución:

Es evidente que $c_1 = 0$ anula a P(x) por lo tanto el binomio $x - c_1$ = x – 0 = x divide exactamente a P(x), luego se podrá escribir que:

$$P(x) = (x - c_1)C_1(x) = x\,(x^3 + 4x^2 - 4x - 16)$$

Como en este caso el divisor es un monomio, el polinomio cociente se puede hallar dividiendo cada término del polinomio P (x) por x:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16}{x} = \frac{x^4}{x} + \frac{4x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} - \frac{16x}{x}$$

Poder factorizar P(x) completamente implicará averiguar si existe algún factor de $C_1(x)$; como para$c_2 = 2$ $C_1(x)$; se anula, podremos afirmar que el binomio x − c_2= x – 2 permitirá escribir $C_1(x)$ = (x − c_2) $C_2(x)$, donde $C_2(x)$ podrá encontrarse mediante la **regla de Ruffini**.

Luego: P(x) = (x − c_1) $C_1(x)$ = (x − c_1) (x − c_2) $C_2(x)$

$$P(x) = x\,(x^3 + 4x^3 - 4x - 16) = x\,(x - 2)\,(x^2 + 6\,x + 8)$$

Como $C_2(x)$ = (x^2 + 6 x + 8) se anula para $c_3 = -2$, el binomio x − c_3 = x + 2 será un factor de $C_2(x)$, por lo tanto se podrá escribir: $C_2(x)$= (x − c_3) $C_3(x)$ y el polinomio P(x) como:

$$\mathrm{P(x)} = (x - c_1)\,C_1(x) = (x - c_1)\,(x - c_2)\,C_2(x) = (x - c_1)\,(x - c_2)\,(x - c3)\,C_3(x)$$

$$P(x) = x(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) = x\,(x - 2)\,(x^2 + 6x + 8) = x(x - 2)(x + 2)(x + 4)$$

De esta manera hemos logrado factorizar por completo al polinomio P(x), utilizando como único recurso la búsqueda de factores.

El polinomio P(x) es de cuarto grado y tiene cuatro raíces reales. En general se cumple:

El **teorema del factor** provee una herramienta para encontrar los diversos factores que posee un polinomio cualquiera, por lo que resulta útil como recurso para factorizar.

Todo polinomio P(x) de grado n que tenga n raíces reales, puede factorizarse como:

$$\mathrm{P(x)} = a_n\ (x - c_1)\,(x - c_2)\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ (x - c_n)$$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

Donde a_n es el coeficiente principal de P(x) y c_1, c_2, ,c_n son las raíces reales de P(x).

Veamos otro *ejemplo*: Factorizar $Q(x) = x^2 + 4$

Para factorizar el polinomio Q(x) será necesario buscar un valor de c que lo anule; como la suma de x^2 y 4 será siempre positiva se puede afirmar que no existe un número real que anule al polinomio, por lo tanto Q(x) no posee raíces reales; sus dos raíces son complejas: $r_1 = 2i$ y $r_2 = -2i$.

El siguiente teorema ayuda a caracterizar las raíces de un polinomio:

Si P(x) es un polinomio de grado n ≥ 1, entonces P(x) = 0 tiene exactamente n raíces, siempre y cuando la multiplicidad k de una raíz se cuente k veces. (Pudiendo ser estas raíces reales o complejas).

Intentar lo siguiente

i) Establecer si existe un factor "x – c" para los siguientes binomios:

a) $x^3 + 1$b) $1 + x^4$ c) $9x^2 - 1$
ii) En los casos que sea posible: a) Factorizar los binomios dados en términos del factor hallado. b) Factorizar por completo el binomio dado.

2.4 FUNCIONES POLINÓMICAS

Una función es polinómica si su regla de definición es un polinomio, es decir si puede expresarse de la forma$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1 x + a_0$donde n es un número natural y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales.

Como en un polinomio los números reales, expresados mediante cifras o letras, están relacionados a través de las operaciones: suma, resta, producto y potencia, el dominio natural de las funciones polinómicas (el conjunto para el cual están definidas) es el conjunto $\Re$.

2.4.1. Representación Gráfica de un Polinomio tipo: $a_1x + a_0$

Teorema
La gráfica de un polinomio de grado menor o igual a uno, es una recta.

Dado que dos puntos determinan una línea, podemos representar gráficamente al polinomio de grado uno encontrando dos puntos que pertenezcan a su gráfica. Después, trazamos una línea que pase por dichos puntos.

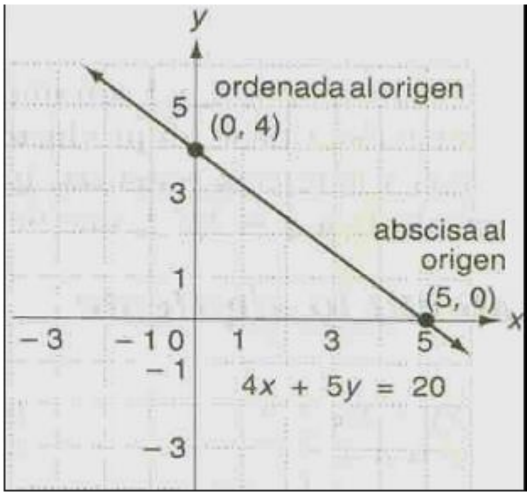
Para mayor seguridad, siempre se debe utilizar un tercer punto como control. A menudo, los puntos más fáciles de encontrar son aquellos en los que la gráfica corta los ejes.

Definición
La **ordenada al origen** (intersección eje y) de una gráfica es la ordenada del punto en el quela gráfica corta al eje y. La **abscisa al origen** (intersección eje x) es la abscisa del punto en el que la gráfica corta al eje x.

Para encontrar la ordenada al origen, se hace x = 0 y se resuelve para y. Para encontrar la abscisa al origen, se hace y = 0 y se resuelve para x.

Ejemplo 1:
Representar gráficamente $4x + 5y = 20$
Solución. Primero se hallan las intersecciones.
$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 4$ (ordenada al origen) representa el punto (0, 4)
$y = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5$ (abscisa al origen) representa el punto (5, 0).

Podemos usar por ejemplo el punto (1, 16/5) como punto de control.



Intentar lo siguiente

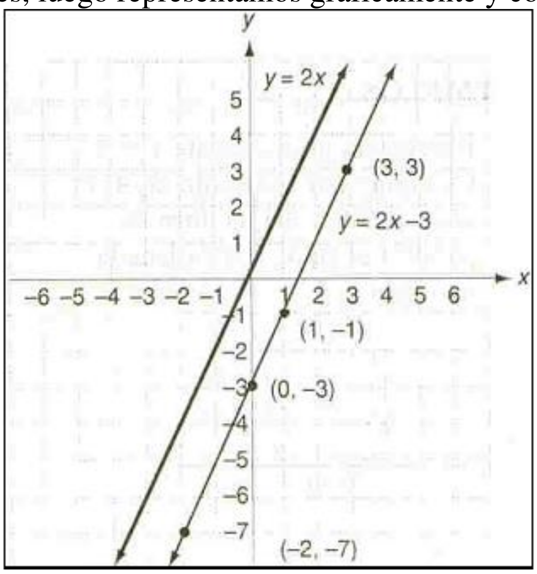
Representar gráficamente: a) $2x - 6y = -2$ b) $3y = 2x - 6$

2.4.1.1. Rectas Paralelas

La gráfica de y =mx es una línea recta que pasa por el origen. ¿Qué sucede si sumamos un número b al miembro derecho de la ecuación para obtener $y = mx + b$.

Ejemplo 2: Representar gráficamente $y = 2x - 3$ y comparar con la gráfica de $y = 2x$.
Primero construimos una tabla de valores, luego representamos gráficamente y comparamos.

x	y (o $2x - 3$)
0	−3
1	−1
3	3
−2	−7



La gráfica de y = 2 x – 3 es una línea recta desplazada 3 unidades hacia abajo a partir de la gráfica de y = 2 x.

Teorema
La gráfica de una ecuación de la forma y = mx es una línea recta que pasa por el origen.
La gráfica de y = mx + b es una línea paralela a y = mx que tiene como ordenada al origen al número b.

Intentar lo siguiente

Representar gráficamente y comparar con la gráfica de y = 2 x.

a) y = 2 x + 1 b) y = 2 x – 4

2.4.1.2. Rectas Perpendiculares

Si dos rectas se intersecan en ángulos rectos, son perpendiculares.

Teorema
Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es −1.

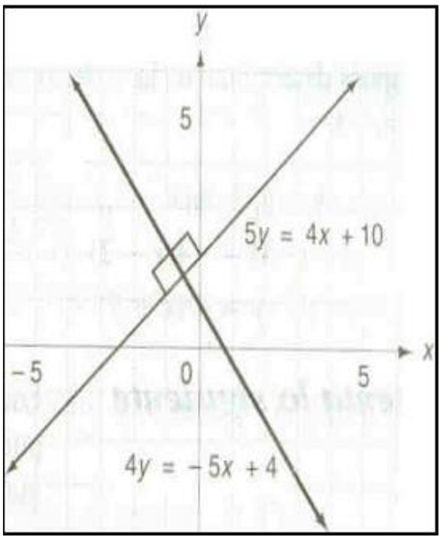
Ejemplo: Determinar si las gráficas de 5 y = 4 x + 10 y 4 y = −5 x + 4 son perpendiculares.

Solución. Primero encontramos la forma pendiente – ordenada al origen resolviendo para y.

$y = \frac{4}{5}x + 2yy = -\frac{5}{4}x + 1$

El producto de las pendientes es − 1; es decir, $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -1$

Las rectas son perpendiculares.



Intentar lo siguiente

Determinar si las gráficas de los siguientes pares de ecuaciones son perpendiculares:

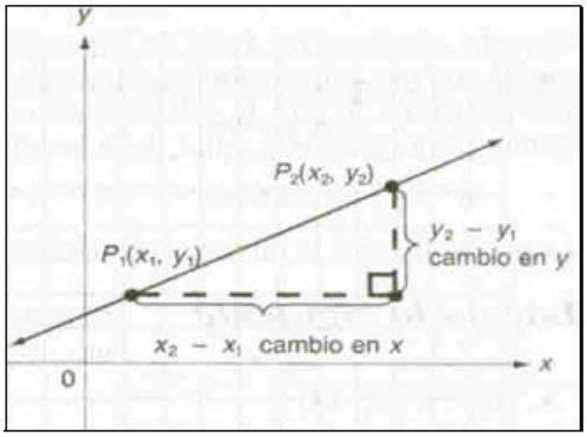
a) 2 y − x = 2 y y + 2 x = 4 b) 3 y = 2 x + 15 y 2 y = 3 x + 10

2.4.1.3. Determinación de la Pendiente de una Recta

Si observamos el grafico vemos una recta sobre la que hemos marcado dos puntos. A medida que vamos de P_1 a P_2, el cambio en x es $x_2 - x_1$. Análogamente, el cambio en y es $y_2 - y_1$.

La razón de cambio en y dividido por el cambio en x se llama **pendiente de la recta**.
Es común utilizar la letra m para designar pendientes.

Definición
La pendiente m de una recta es el cambio en y dividido por el cambio en x, dicho en forma matemática: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta, y $x_2 \neq x_1$.



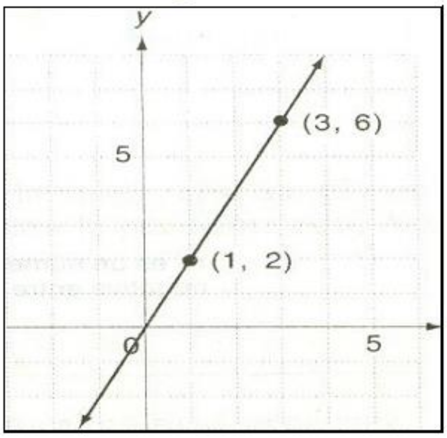
Para hallar la pendiente de una recta, se utiliza las coordenadas de dos puntos cualesquiera para determinar el cambio en y así como el cambio en x. Después se divide el cambio en y por el cambio en x.

Ejemplo: Los puntos (1, 2) y (3, 6) están en una recta. Encontrar su pendiente.

Solución.

$$m = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$



Si utilizamos los puntos (1, 2) y (3, 6) en sentido inverso, encontramos que el cambio en y es negativo y el cambio en x es negativo. Obtenemos el mismo número para la pendiente.

$$m = \frac{2-6}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Cuando calculamos el valor de la pendiente, el orden de los puntos no importa en la medida en que calculemos las diferencias en el mismo orden.

Los puntos (0, 0) y (−1, −2) también se encuentran sobre la recta. Si utilizamos estos puntos para calcular el valor de la pendiente, obtenemos lo siguiente:

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

$$m = \frac{-2-0}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

La pendiente será la misma, independiente del par de puntos que utilicemos. Vemos que esta recta asciende de izquierda a derecha y tiene pendiente positiva. Si una recta desciende de izquierda a derecha tendrá pendiente negativa.

Intentar lo siguiente

Calcular la pendiente de la recta que contiene a cada par de puntos.

a) (1, 1) y (12, 14)   b) (3, 9) y (4, 10)   c) (0, −4) y (5, 7)   d) (7, 2) y (6, 3)

2.4.1.4. Ecuación Punto – Pendiente de una Recta

Si conocemos la pendiente de una recta y las coordenadas de un punto sobre ella podemos encontrar una ecuación para la misma.

Teorema
La ecuación punto – pendiente

Una recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m tiene por ecuación $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$.

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por (1/2, −1) con pendiente 5.

Solución. $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$

$y - (-1) = 5\,(x - 1/2)$ Sustituyendo

$y + 1 = 5\,(x - 1/2)$

$y = 5x - 7/2$ Simplificando

Ejemplo 2: Encontrar la ecuación de la recta que tiene ordenada al origen 4 y pendiente 3.

Solución. $(y - y_1) = m\,(x - x_1)$

$y - 4 = 3\,(x - 0)$ Sustituyendo

$y = 3x + 4$ Simplificando

Intentar lo siguiente

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (−2, 4) con pendiente − 3.

b) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (−4, −10) con pendiente 1/4.

c) Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa al origen es 5 y pendiente − 1/2.

2.4.1.5. Ecuación de la Recta que Pasa por Dos Puntos

Dados dos puntos, podemos encontrar la ecuación de la recta que pasa por ellos. Si encontramos la pendiente de la recta dividiendo el cambio en y por el cambio en x, y sustituimos este valor por m en la ecuación punto – pendiente, obtenemos la **ecuación de la recta que pasa por dos puntos**.

Teorema
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

La ecuación de cualquier recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se calcula con la fórmula:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

Ejemplo 1: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 3) y (1, −4).

Solución. Primero encontramos la pendiente y después sustituimos en la fórmula los dos puntos. Tomamos (2, 3) como (x_1, y_1) y (1, −4) como (x_2, y_2).

$$y - 3 = \left(\frac{-4 - 3}{1 - 2}\right)(x - 2)$$

$$y - 3 = \frac{-7}{-1}(x - 2)$$

$$y - 3 = 7\ (x - 2)$$

$$y - 3 = 7x - 14$$

$$y = 7x - 11$$

Podríamos haber tomado (1, −4) como (x_1, y_1) y (2, 3) como (x_2, y_2) y haber obtenido la misma ecuación.

$$y - (-4) = \frac{3 - (-4)}{2 - 1}(x - 1)$$

Simplificando: $y = 7x - 11$

Intentar lo siguiente

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos señalados:

a) (1, 4) y (3, −2)   b) (3, −6) y (0, 4)

2.4.2.1. Representación Gráfica de un Polinomio tipo: $ax^2 + bx + c$

A continuación mostramos una fórmula que proporciona las soluciones de cualquier ecuación cuadrática.

Teorema
La fórmula cuadrática o fórmula de Bháskara
El conjunto solución de cualquier ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, está dado por: $S = \{ r_1 , r_2 \}$, donde

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1: Resolver $3x^2 + 5x = -1$.

Solución: Primero hay que encontrar la forma estándar y determinar a, b y c.

$$3x^2 + 5x + 1 = 0 \quad \text{donde} \quad a = 3, b = 5, c = 1$$

Después, hay que utilizar la fórmula cuadrática.

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{5^2-4.3.1}}{2.3} \quad ; \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{5^2-4.3.1}}{2.3}$$

Entonces las soluciones son: $r_1 = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$ y $r_2 = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$ y por lo tanto el conjunto solución vendrá dado por: $S = \left\{ \frac{-5+\sqrt{13}}{6} , \frac{-5-\sqrt{13}}{6} \right\}$

Cuando se utiliza la fórmula cuadrática, las soluciones que se obtienen son las de la ecuación original a menos que se haya cometido un error de cálculo.

Intentar lo siguiente

Resolver utilizando la fórmula cuadrática: a) $3x^2 + 2x = 7$ b) $5x^2 + 3x = 9$

2.4.2.2 Discriminante

La expresión $b^2 - 4ac$ de la fórmula cuadrática se llama discriminante. Con este número podemos determinar la naturaleza de las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática.

Teorema

Una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ y coeficientes reales, tiene
a) Exactamente una raíz real si $b^2 - 4ac = 0$.
b) Dos raíces reales si $b^2 - 4ac > 0$.
c) Dos raíces complejas, no reales, que son conjugadas entre sí cuando $b^2 - 4ac < 0$.

Ejemplo 1: Determinar la naturaleza de las raíces de $9x^2 - 12x + 4 = 0$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

Solución. a = 9, b = −12 y c = 4

Calculamos el discriminante $b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$

Solo hay una raíz y ésta es un número real.

Ejemplo 2: Determinar la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5x + 8 = 0$

Solución. a = 1, b = 5 y c = 8

Calculamos el discriminante $b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 - 32 = -7$

En vista que el discriminante es negativo, la ecuación no tiene raíces reales. Sus raíces son complejas y conjugadas entre sí.

Ejemplo 3: Determinar la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5x + 6 = 0$

Solución. a = 1, b = 5 y c = 6

Calculamos el discriminante $b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

Como el discriminante es positivo, hay dos raíces reales distintas entre sí.

Intentar lo siguiente

Determinar la naturaleza de las raíces de cada ecuación

a) $x^2 + 5x - 3 = 0$ b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ c) $3x^2 - 2x + 1 = 0$

2.4.2.3. Vértice de la parábola que representa a la función cuadrática

Al punto que representa el vértice de la parábola cuadrática lo podemos generalizar como: $V(x_v, y_v)$, donde el valor de abscisa es el valor medio o media aritmética entre las raíces de la ecuación correspondiente, es decir: $x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$ y $y_v = f(x_v)$. También se puede calcular la abscisa mediante la fórmula: $x_v = -\frac{b}{2a}$

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

Ejemplo: $y = 2x^2 – 12\,x + 10$

$x_v = -\frac{(-12)}{2.2} = 3$y

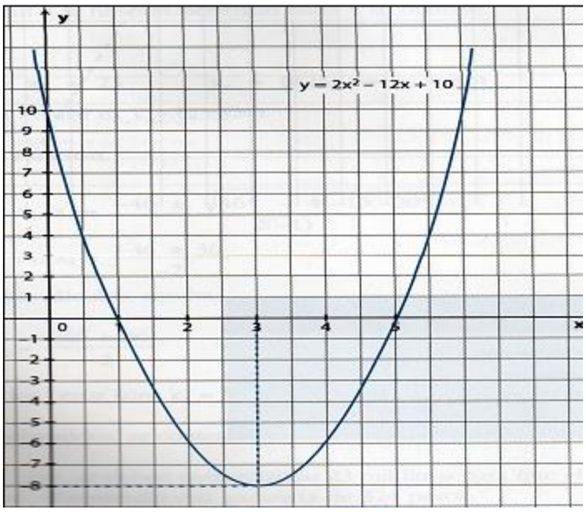
$y_v = f(3) = -8$

Ceros de la función:

$x_1 = 5$ y $x_2 = 1$

Estos valores se hallan utilizando la fórmula cuadrática.

La ordenada al origen: 10.



2.4.3 Revisión de Gráficas de Funciones Polinómicas

Considérense las siguientes funciones polinómicas

$$f_1(x) = 2x - 5f_2(x) = -5x^2 + 20x - 20$$

$$f_3(x) = 4x^2 + 2x^3 - 6xf_4(x) = x^4 - 4x^2$$

Las dos primeras son funciones polinómicas conocidas, podemos anticipar que sus gráficas serán una recta y una parábola, respectivamente. En general, para obtener algunos puntos que permitan bosquejar las gráficas de las funciones polinómicas se deberán asignar distintos valores a la variable “x”, calcular sus correspondientes imágenes y luego representar en un sistema de ejes cartesianos los puntos de coordenadas $(x_i\,,\, f(x_i))$.

¿Cuántos valores se necesitarán? ¿Qué valores deberán asignarse a “x”?

En búsqueda de respuesta a estas cuestiones consideremos lo siguiente:

• Existen en el gráfico puntos de especial interés, ellos son los puntos de corte con los ejes coordenados. Sobre el punto de corte con el eje vertical existe información explícita en la expresión de la función polinómica; en efecto el término a_0, ordenada al origen[1], indica el valor que asume la función polinómica cuando x = 0. Así, para las funciones dadas las ordenadas al origen serán:

	Ordenada al origen
$f_1(x) = 2x - 5$	-5
$f_2(x) = -5x^2 + 20x - 20$	-20
$f_3(x) = 4x^2 + 2x^3 - 6x$	0
$f_4(x) = x^4 - 4x^2$	0

[1]Por tratarse de la ordenada del punto de abscisa cero.

• Averiguar acerca del punto de corte con el eje horizontal, la abscisa al origen, implica averiguar para qué valor de x la función polinómica se anula, es decir, encontrar las raíces[2] de la ecuación $f_i(x) = 0$. Estas raíces se pueden obtener fácilmente a partir de la factorización de la función polinómica y de la determinación de los valores de x que anulan a cada uno de los factores.

Los pasos para la obtención de las raíces de las funciones polinómicas consideradas se consignan en la siguiente tabla:

Función polinómica	Ecuación para hallar los ceros de $f_i(x) = 0$	Expresiones equivalentes	Ceros de la función o Raíces de la ecuación
$f_1(x) = 2x - 5$	$2x - 5 = 0$	$2\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0$	$\frac{5}{2}$
$f_2(x) = -5x^2 + 20x - 20$	$-5x^2 + 20x - 20 = 0$	$-5\,(x^2 - 4x + 4) = 0$ $-5\,(x - 2)^2 = 0$	2 Raíz doble
$f_3(x) = 4x^2 + 2x^3 - 6x$	$4x^2 + 2x^3 - 6x = 0$	$2x\,(x^2 + 2x - 3) = 0$ 2x (x – 1) (x + 3) = 0	0, 1 y -3
$f_4(x) = x^4 - 4x^2$	$x^4 - 4x^2 = 0$	$x^2(x^2 - 4) = 0$ $x^2(x + 2)(x - 2) = 0$	0, 2 y -2

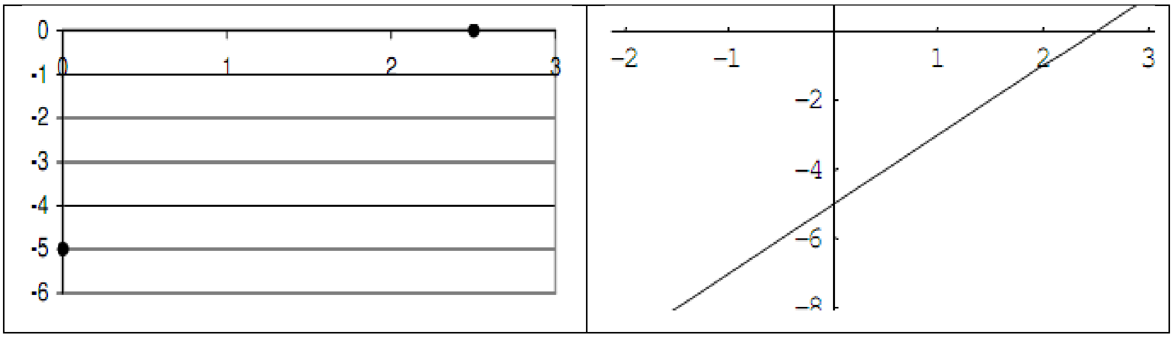
Factorizar las funciones polinómicas 1, 2 y 4 resultó sencillo debido a que una vez extraído el factor común los polinomios obtenidos eran: un binomio, un trinomio cuadrado perfecto o una diferencia de cuadrados, por lo tanto fue posible recurrir a las técnicas de factoreo conocidas. Para la función polinómica 3 se pudo recurrir a dos procedimientos, utilizar el teorema del factor, encontrando el valor dec que anula al polinomio en cada caso, por "ensayo y error"; o bien, extraer factor común 2x y luego utilizar la fórmula resolvente para determinar las raíces del polinomio de grado dos.
Obtenidos los puntos de corte con los ejes coordenados, se tendrán los primeros puntos para graficar.

Para el caso de la función polinómica de grado uno, a partir de estos dos únicos puntos será posible determinar la recta correspondiente.

Algunos puntos que permiten bosquejar la gráfica	Gráfica de la función polinómica
$f_1(x) = 2x - 5$	

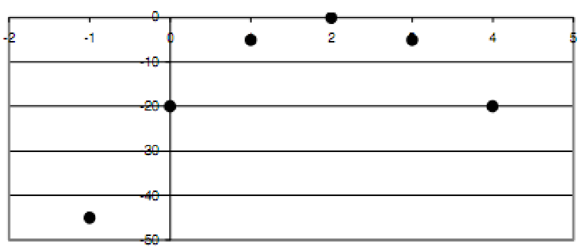
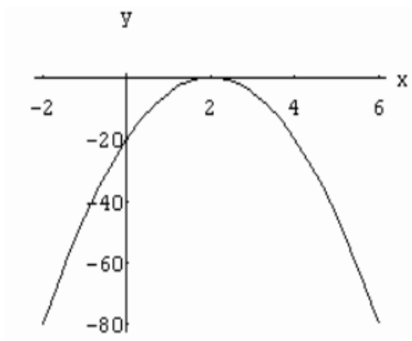
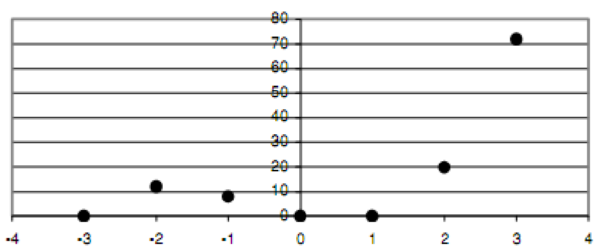
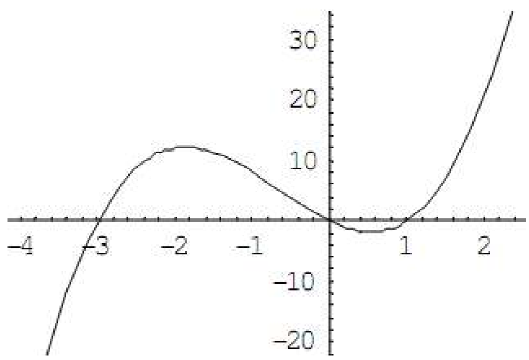
[2] Valores de x que satisfacen las igualdades planteadas.

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

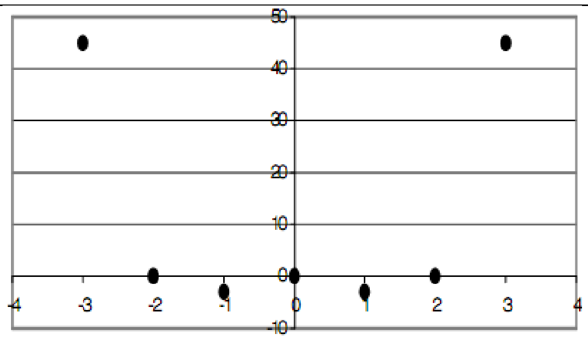
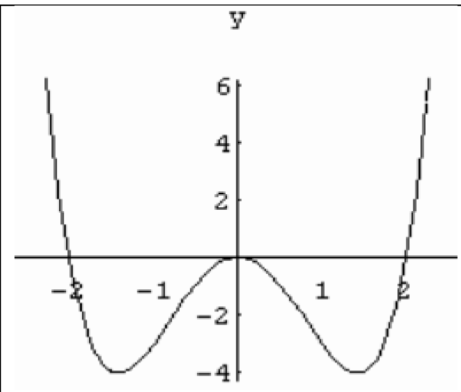


En el caso de las restantes funciones polinómicas, los puntos de corte con los ejes coordenados serán dos o más puntos por los que pasará la gráfica de la función.

Para obtener otros puntos que permitan bosquejar la gráfica se deberán asignar nuevos valores a la variable "x", tomando como referencia los puntos de corte con el eje horizontal, y calcular sus correspondientes imágenes. Estos puntos obtenidos darán idea de cómo será la gráfica, como se muestra a continuación:

$f_2(x) = -5x^2 + 20x - 20$	
	
$f_3(x) = 4x^2 + 2x^3 - 6x$	
	

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

$f_4(x) = x^4 - 4x^2$	
	

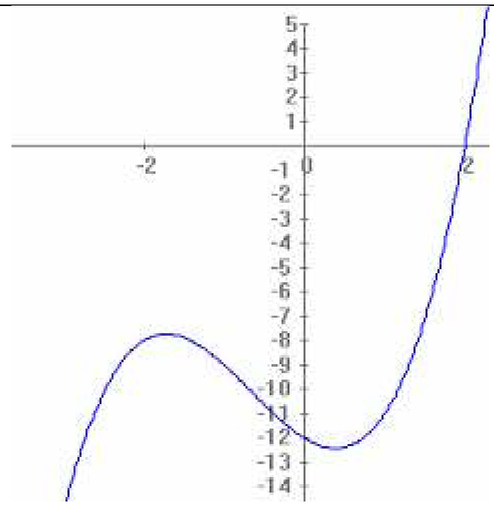
Intentar lo siguiente

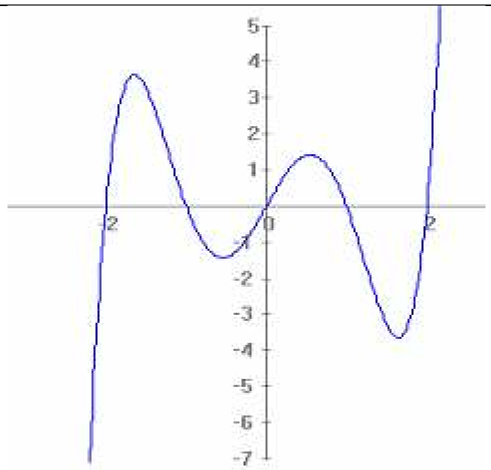
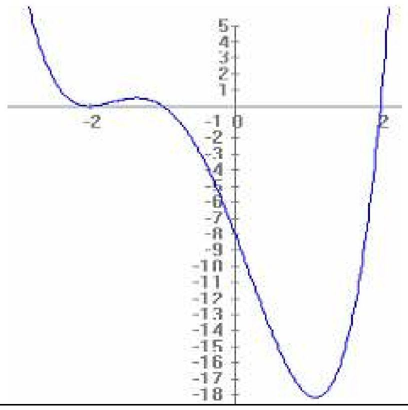
1. Utilizando las raíces y el término a_0, graficar los siguientes funciones polinómicas de primer y de segundo grado.

a) P(x) = − 3x + 1 b) $P(x) = \frac{1}{2}x + 5$

c) $P(x) = -3x^2 + 27$ d) $P(x) = 3x^2 + 3x - 18$

2. A partir de las gráficas de las funciones polinómicas dadas a continuación determinar las raíces reales y utilizarlas para iniciar la factorización de la función dada. ¿Qué se puede decir de las restantes raíces son reales o complejas? ¿Alguna de ellas será una raíz múltiple? **Justifique**.

$f_1(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 12$	

$f_2(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$	
$f_3(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8$	

2.5 APLICACIONES DEL FACTOREO

2.5.1 Simplificación de Expresiones racionales

El cociente de dos polinomios P(x) y Q(x) se denomina expresión racional. Si estos polinomios tienen en común algún factor entonces es posible simplificarlo y escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en forma más sencilla.

Por ejemplo en la expresión $\frac{x^2-5x-6}{x^3+1}$ se tiene que $x = -1$ es raíz del numerador y del denominador. Así ambos podrán ser escritos como producto donde uno de los factores será x- (-1) , es decir x + 1:

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} = \frac{(x + 1)(x - 6)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x - 6}{x^2 - x + 1}$$

El numerador tiene una raíz x = 6 y el denominador tiene raíces complejas conjugadas.

Como no comparten raíces, carecen de factores comunes y no es posible simplificar más la última expresión. Finalmente se obtiene que:

$$\frac{x^2-5x-6}{x^3+1} = \frac{x-6}{x^2-x+1} \qquad \text{Para } x \neq -1$$

Nota: La condición x ≠ −1 debe ser considerada porque las expresiones en ambos miembros son equivalentes para cualquier valor de x excepto para x = −1, donde la expresión original no está definida.

Intentar lo siguiente

Simplificar las siguientes expresiones racionales.

a) $\frac{x^2+6x+5}{x^2-x-2}$ b) $\frac{2x^3-x^2-2x+1}{x^2-1}$

TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD 2

FUNCIONES POLINÓMICAS

1. Dadas las siguientes funciones polinómicas:

$\boldsymbol{P}(x) = 2x - 4$ $\quad$ $\boldsymbol{Q}(x) = 4x^2 + 2x^3 - 6x$ $\quad$ $\boldsymbol{R}(x) = -6 - 3x + 3x^2$

$\boldsymbol{S}(x) = x^4 - x^3 - 6x$ $\quad$ $\boldsymbol{T}(x) = 5 - x$

Indicar el grado de cada una de ellas y determinar los coeficientes de los términos de grado cero, uno, dos y cuatro.

2. Indicar cuáles de los resultados son incorrectos. En ese caso, corregirlos:

a) $x + x + x = 3x$ $\quad$ b) $x^3 . x = 2x^4$ $\quad$ c) $(x+2)^2 = x^2 + 4$

d) $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$ $\quad$ e) $2x^2 . 3x^2 = 6x^4$ $\quad$ f) $2x^2 + 3x^3 = 5x^5$

g) $(3x)^2 = 3x^2$ $\quad$ h) $x^5 : x = x^5$ $\quad$ i) $x^2 + x^2 = 2x^2$

3. Dados los siguientes polinomios:

$\boldsymbol{P}(x) = 4x^3 + x^2 - 2x - 13$ $\quad$ $\boldsymbol{Q}(x) = 2x^2 + 3x + 9$ $\quad$ $\boldsymbol{R}(x) = -x^3 + 2$

$\boldsymbol{S}(x) = x - 5$ $\quad$ $\boldsymbol{T}(x) = 2x^2$ $\quad$ $\boldsymbol{U}(x) = -2x^5 + x^2 - x$

Encontrar:

a) $-3 \cdot \boldsymbol{Q}(x)$ $\quad$ $\boldsymbol{P}(x) + \boldsymbol{Q}(x)$ $\quad$ c) $\boldsymbol{Q}(x) - \boldsymbol{U}(x)$

d) $\boldsymbol{P}(x) + 4\boldsymbol{R}(x)$ $\quad$ $\boldsymbol{T}(x) \cdot \boldsymbol{Q}(x)$ $\quad$ f) $\boldsymbol{S}(x) \cdot \boldsymbol{R}(x)$

g) $\mathrm{T(x) \cdot R(x) + U(x)}$ $\quad$ $[\boldsymbol{S}(x)]^2$ $\quad$ i) $[\boldsymbol{R}(x)]^2$

4. Dados los siguientes polinomios:

i- Predecir el grado de cada uno de ellos.

ii- Reducirlos a su mínima expresión.

a) $\boldsymbol{P}(x) = 7x - (3 - x) - 2x$ $\quad$ b) $\boldsymbol{P}(x) = (7x + 5) - (2x + 3)$

c) $\boldsymbol{P}(x) = (x + 2).(x - 2)$ $\quad$ d) $\boldsymbol{P}(x) = (3 - 5x).(3 + 5x)$

e) $\boldsymbol{P}(x) = (-2x - 3).(3x + 6)$ $\quad$ f) $\boldsymbol{P}(x) = 2x^2.(2x + 1 - 10x^2)$

g) $\boldsymbol{P}(x) = \left(\sqrt{x} - 10\right).(\sqrt{x} + 10)$ $\quad$ h) $\boldsymbol{P}(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 2x + 1)$

5. Se dan los siguientes polinomios:

$\boldsymbol{P}(x) = x^2 - 6x + 4$ $\quad$ $\boldsymbol{Q}(x) = x - 1$ $\quad$ $\boldsymbol{R}(x) = x^2 + 6x - 4$ $\quad$ $\boldsymbol{Q}(x) = 4 - x^2$

Se pide, obtener mediante operaciones entre los mismos, un polinomio con las características indicadas en cada caso:

a) De dos términos $\quad$ b) De grado 3.

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

c) De grado 5.

d) Nulo.

e) Sea un monomio en *"x"* con coeficientes positivos

f) Sea un cuatrinomio de tercer grado.

6. Utilizar el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios, en los casos en los que sea posible, utilizar la regla de Ruffini para hallar cociente y resto:

a) $(8x^4 - 8x^2 + 6x + 6):(2x^2 - x)$
b) $(-8x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 17x + 9):(2x^2 + 3x + 1)$
c) $(5x + 2x^3 - 3):(x + 2)$
d) $(x^3 - x^2 + 7):(x - 1)$
e) $(x^3 + 9x^2 - 3x - 1):(2x - 1)$

i- Verifique cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto:

$$\boldsymbol{P}(x) = \boldsymbol{Q}(x) \cdot \boldsymbol{C}(x) + \boldsymbol{R}(x)$$

ii- Escribir el resultado de las divisiones dadas teniendo en cuenta que:

$$\frac{\boldsymbol{P}(x)}{\boldsymbol{Q}(x)} = \boldsymbol{C}(x) + \frac{\boldsymbol{R}(x)}{\boldsymbol{Q}(x)}$$

7. Completar el factor que hace falta para que se cumplan las igualdades:

a) $2x^3 + 8x =$ ______$(x^2 + 4)$

b) $3ax^2 - a^2x = (3x - a)$______

c) ______$(-5x^2 + 4x) = -15x^2 + 12x$

d) $\left(\frac{3}{4} - x^2\right)$______ $= \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^4$

8. Factorear el polinomio $\boldsymbol{P}(x)$ extrayendo como factor común el indicado en cada caso:

$$\boldsymbol{P}(x) = 4x^5 + 2x^2 - 10x^6 + 20x^3$$

a) $\frac{1}{2}x$ b) $4x^2$ c) $5x^4$

9. Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^4 + x^3 + 3x - 1):(x - 2)$

b) $(x^5 - 32):(x - 2)$

c) $(-2x^4 + x^2 + 4):(x + 3)$

d) $\left(\frac{1}{8} - x^3\right):(x - \frac{1}{2})$

e) $(x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 1):(x + 2)$

f) $(x^3 - 4x - 1):(x + 0{,}5)$

i- Utilizar el teorema del resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.

ii- Cuando sea posible, factorearlo en termino del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

10. Teniendo en cuenta que: “un polinomio $\boldsymbol{P}(x)$ tiene un factor $x-c$, si y sólo si $\boldsymbol{P}(c)=0$” (Teorema del factor).

i-Establecer si el binomio dado $x-c$ es un factor del polinomio $\boldsymbol{P}(x)$. Si lo es, factorice $\boldsymbol{P}(x)$.

a) $\boldsymbol{P}(x)=x^3+6x^2+11x+6$ $\qquad x+1$
b) $\boldsymbol{P}(x)=x^3+5x^2-2x-24$ $\qquad x-3$
c) $\boldsymbol{P}(x)=-x^3+7x+6$ $\qquad x+2$
d) $\boldsymbol{P}(x)=x^3-6x^2+11x-6$ $\qquad x-1$

ii- Establecer si existe un factor $x-c$ para los siguientes binomios. En caso afirmativo, factorizar los binomios dados en termino del factor encontrado.

a) x^2+4 b) x^2-4 c) x^2-1
d) $\frac{1}{8}-x^3$ e) $2+x^3$ f) x^5-32
g) x^2-5 h) $16x^2-9$ i) $2-x^3$

11. Para cada polinomio de segundo grado, encontrar los factores $x-c$.

a) $\boldsymbol{P}(x)=-x^2+2x+6$
b) $\boldsymbol{P}(x)=\frac{1}{2}x^2$
c) $\boldsymbol{P}(x)=2x^2-2x-4$
d) $\boldsymbol{P}(x)=-x^2+1$
e) $\boldsymbol{P}(x)=x^2+4x+4$
f) $\boldsymbol{P}(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$

i- Factorear los polinomios dados en termino de uno de los factores encontrados.

ii-Escribir los polinomios dados como producto de sus factores.

iii-Dar la expresión general de la forma factoreada del polinomio de segundo grado.

12. Dadas las siguientes funciones polinómicas:

$\boldsymbol{P}(x)=2x-4$ $\qquad \boldsymbol{Q}(x)=4x^2+2x^3-6x$ $\qquad \boldsymbol{R}(x)=-6-3x+3x^2$
$\boldsymbol{S}(x)=x^4-x^3-6x$ $\qquad \boldsymbol{T}(x)=5-x$

i-Encontrar el valor de la función polinómica para los valores de “*x*” que se indican:

$x_1=0$ $\quad x_2=3$ $\quad x_3=-3$ $\quad x_4=1$ $\quad x_5=-2$ $\quad x_6=-1$

ii-Ubicar algunos puntos $(x_i,\boldsymbol{P}(x_i))$ en un sistema de ejes cartesianos e indicar en cuales de las funciones polinómicas es posible anticipar su gráfico.

13. Sabiendo que la forma general de la función polinómica es:

$$\boldsymbol{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

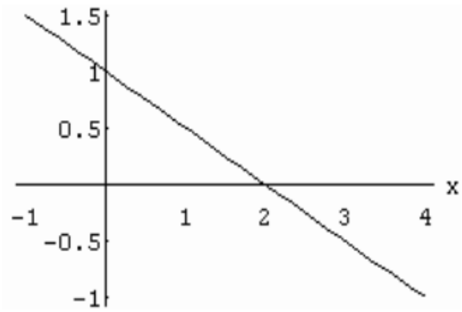
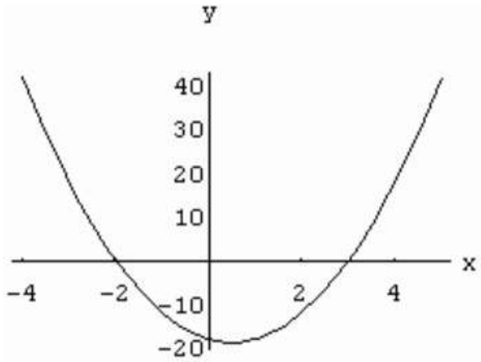
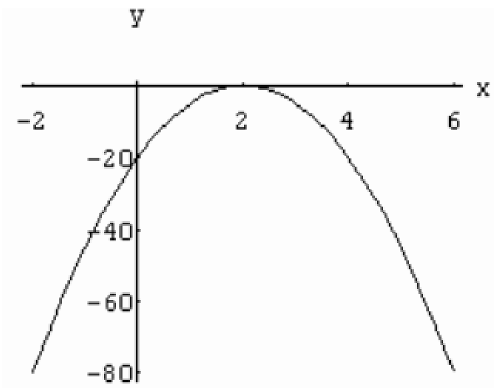
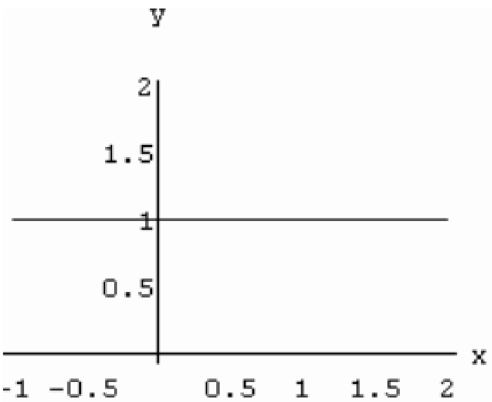
i-Determinar a partir del gráfico:

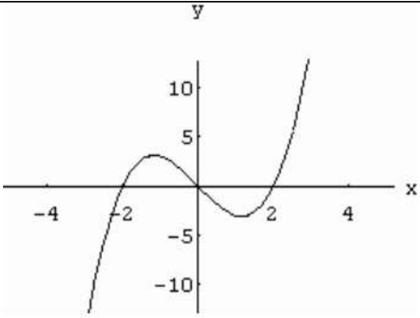
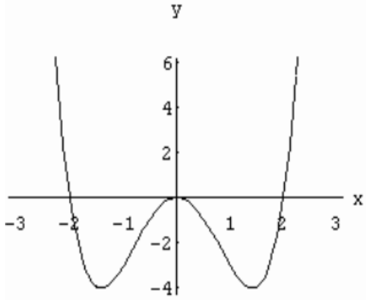
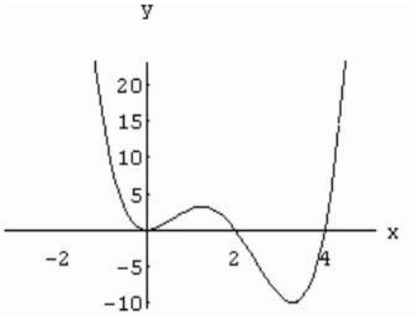
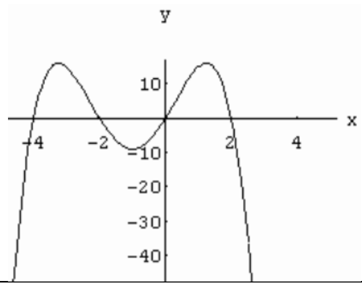
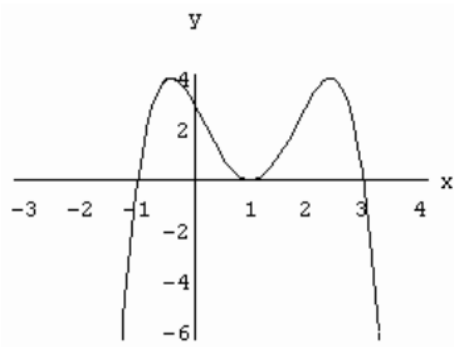
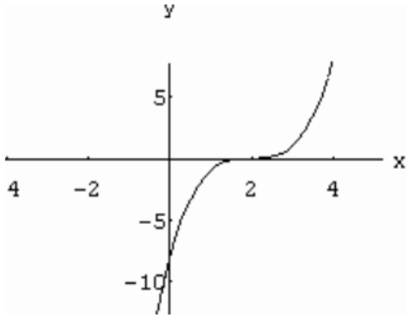
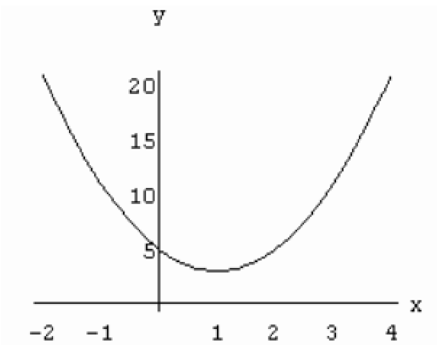
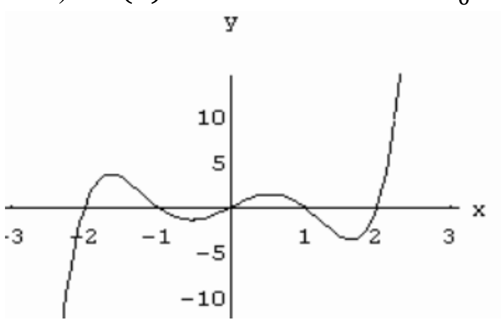
a) El valor de “a_0” y completarla.

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

b) Las raíces reales de cada función polinómica.

ii-Verificar las raíces halladas, resolviendo las ecuaciones $\boldsymbol{P}(x) = 0$, a partir de la factorización de las funciones polinómicas dadas. Individualizar las raíces múltiples.

a) $\boldsymbol{P}(x) = -\frac{1}{2}x + a_0$ 	b) $\boldsymbol{P}(x) = 3x^2 - 3x + a_0$ 
c) $\boldsymbol{P}(x) = -5x^2 + 20x + a_0$ 	d) $\boldsymbol{P}(x) = a_0$ 
e) $\boldsymbol{P}(x) = x^3 - 4x + a_0$	f) $\boldsymbol{P}(x) = x^4 - 4x^2 + a_0$

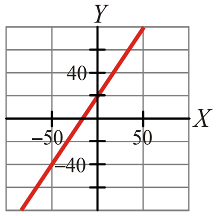
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>g) $\boldsymbol{P}(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + a_0$

</td>
<td>h) $\boldsymbol{P}(x) = -x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 16x + a_0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>i) $\boldsymbol{P}(x) = -x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + a_0$

</td>
<td>j) $\boldsymbol{P}(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + a_0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>k) $\boldsymbol{P}(x) = 2x^2 - 4x + a_0$

</td>
<td>l) $\boldsymbol{P}(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + a_0$

</td>
</tr>
</table>

14. i) Utilizando la raíz y el término "a_0", graficar las siguientes funciones polinómicas de primer grado:

a) x+2y =4 c) $P(x)=\frac{2}{5}x+3$ d) y = – 5x

b) –x+2y= 6 e) x- 2 = y f) 3p +6q = 12

ii) Hallar la expresión analítica de la recta cuya gráfica es la dada e indicar las coordenadas de un punto perteneciente a la recta que se ubique en el tercer cuadrante:



15. i- Hallar la ecuación de la recta que pasa por P(-1,2) y cuya pendiente es -1/3.

ii- Encontrar la ecuación de la recta que contiene al punto dado con la pendiente indicada:

a) (3,2) ; m= 4 b) (-6,4); m= ½ c) (0,-7); m= 0 d) (-5,-2); m=-1

iii- Los puntos (1,2) y (3,6) están en una recta. Encontrar su pendiente y la ecuación correspondiente.

iv- Calcular la pendiente, si existe, de la recta que pasa por cada par de puntos. En cada caso, escribir la ecuación pendiente- ordenada al origen de la recta.

a) (5,0); (6,8) b) (0,7); (-2,9) c) (-2,- 4) ; (-9, -7) d) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right);\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$

16. i- Determinar si las gráficas de cada par de ecuaciones son paralelas:
a) x+ 6 = y ; y-x = -2b) y +8 = -6x , -2x + y = 5 c) 2x –7 = y , y - 2x = 8

ii- Escribirla ecuación de la recta que pasa por el punto (-1, 3) y es paralela a la recta 2x +y =10

iii-Determinar si las gráficas de las rectas son perpendiculares

a) $5y = 4x +10$ y $4y= -5x+4$ b) y= 4x –5 ; 4y = 8 –x c) 2x-5y = -3 ; 2x +5y = 4

17. Representar la gráfica de la siguiente función: a) $y=-x^2+4$ b) $f(x)=-2x^2+4x$

18. Graficar las funciones polinómicas del ejercicio 11 indicando las raíces, ordenada al origen y las coordenadas del vértice.

19. Graficar las siguientes funciones polinómicas de segundo grado cuyas raíces son números complejos:

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

a) $\boldsymbol{P}(x) = x^2 + 1$ b) $\boldsymbol{P}(x) = x^2 - 4x + 5$

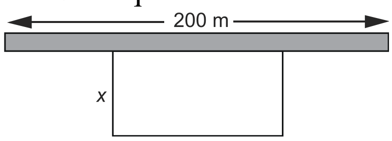
c) $\boldsymbol{P}(x) = -x^2 - 4$ d) $\boldsymbol{P}(x) = x^2 + 2x + 10$

20. Simplificar las siguientes expresiones racionales:

a) $\frac{x^2}{x^2+2x}$	e) $\frac{9y^2+12y^8-15y^6}{3y^3}$	g) $\frac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}$
b) $\frac{n^2-1}{n^3-n^2+n-1}$	f) $\frac{2x-4}{x^3+5x^2-2x-24}$	h) $\frac{2x^3+x^2-3x+1}{2x-1}$
c) $\frac{3x^2+x-10}{5x-3x^2}$	g) $\frac{3x^2+3x-6}{2x^2+6x+4}$	i) $\frac{n-1}{n^2-1}$
d) $\frac{x^2-5x}{5-x}$	h) $\frac{8-x^3}{x^2-2x}$	
e) $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}$	i) $\frac{-6a^3+9a^6-12a^9}{-2a^3}$	

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Con 200 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared:



a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?

b) Construye la función que nos da el área del recinto.

2. Sea $P_{(x)} = ax^2 + 6x - 4$

a) ¿Cuál debe ser el valor de “a” para que “(x – (½))” sea factor de $P_{(x)}$?

b) Para a = - 2, grafique $P_{(x)}$ a partir de las raíces y el vértice.

3. Si en una división de polinomios la Regla de Ruffini dio:

	1	-2	0	-1	1
2		2	0	0	-2
	1	0	0	-1	-1

a) ¿Es exacta la división?. ¿Porqué?

b) Escriba el polinomio dividendo.

c) ¿El divisor es “ –x + 2” ?

d) Use el algoritmo de la división y compare resultados.

UNIDAD 3: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

3.1. ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

3.1.1. Ecuaciones de Primer Grado con una incógnita

Se dice que una ecuación es **entera** cuando las incógnitas esta sometidas únicamente a las operaciones de suma, resta y multiplicación.

Definición
Una ecuación entera con una incógnita se dice de primer grado o lineal, cuando el mayor grado con que figura la incógnita es el primero.

Una proposición como $3\,(x + 3) = x + 5$ es un ejemplo de una **ecuación de primer grado o ecuación lineal**, porque la variable x sólo aparece elevada a la primera potencia. También se dice que es una **ecuación condicional**; es cierta para ciertas sustituciones de la variable x, pero no para otras. Por ejemplo, es verdadera cuando $x = -2$, pero es falsa para $x = 1$. Por otro lado, una ecuación como $3\,(x + 2) = 3x + 6$ se llama **identidad** porque es verdadera o válida para todos los números reales x.

Resolver una ecuación quiere decir determinar los números reales "x" para los cuales la ecuación dada es verdadera. Dichos números reales se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación dada.

Resolvamos la ecuación $3(x + 3) = x + 5$. La estrategia es reunir todos los términos donde aparezca la variable, de un lado de la ecuación, y las constantes del otro.

El primer paso es eliminar el paréntesis aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

$3\,(x + 3) = x + 5$
$3x + 9 = x + 5$
$3x + 9 + (-9) = x + 5 + (-9)$ Sumando (-9) a cada lado de la ecuación
$3x = x - 4$
$3x + (-x) = x - 4 + (-x)$ Sumando $(-x)$ a la ecuación
$2x = -4$
$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}(-4)$ Multiplicando a cada lado por $\frac{1}{2}$
$x = -2$

Para verificar que $x = -2$ es la solución de la ecuación, se reemplaza $x = -2$ en la ecuación original:
$3\,[(-2) + 3] = (-2) + 5 \quad \rightarrow \quad 3 = 3$

No se debe decir que (-2) es una solución hasta que no se haya comprobado.

En la solución anterior hemos empleado las dos propiedades básicas de la igualdad.

Propiedad de igualdad en la suma
Para todos los números reales, a, b y c, si a = b entonces a + c = b + c.

Propiedad de igualdad en la multiplicación
Para todos los números reales, a, b y c, si a = b entonces ac = bc.

La importancia de estas dos propiedades reside en que producen **ecuaciones equivalentes**, ecuaciones que tienen las mismas raíces. Así, la propiedad de la suma convierte a la ecuación $2x - 3 = 7$ en la forma equivalente $2x = 10$.

Regla
Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se suprimen los paréntesis en caso que los haya. Se trasponen los términos de modo que todos los que contienen a la incógnita queden en el primer miembro y los independientes en el segundo; se reducen los términos en cada miembro, y, en caso que la incógnita quede afectada por un coeficiente, se pasa éste al segundo miembro. Efectuando las operaciones, queda determinada la solución. Si al despejar la incógnita resulta precedida por el signo menos, se multiplican ambos miembros de la ecuación por (−1).

Intentar lo siguiente

Resolver las siguientes ecuaciones enteras de primer grado:

a) $x + 3 = 9$ b) $2x + 5 = x + 11$ c) $3(x - 1) = 2x + 7$

d) $5x - 3 = 3x + 1$ d) $2(x + 2) = x - 5$ e) $4(x + 2) = 3(x - 1)$

3.1.2 Ecuaciones Racionales de Primer Grado

Se dice que una ecuación es racional cuando por lo menos una de las incógnitas figura en el denominador.

Ejemplo 1: Resolver $\frac{3}{1-x} = 4$

Solución: $3 = 4(1 - x)$ Sabiendo que $x \neq 1$, se multiplica ambos miembros por $(1 - x)$
$3 = 4 - 4x$ Utilizando la propiedad distributiva del producto respecto a la resta
$4x - 4 = -3$ Multiplicando ambos miembros por -1 y ordenándolos
$4x = 4 - 3$ Sumando 4 a cada lado de la ecuación
$x = \frac{1}{4}$ Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{4}$

Luego, 1/4 es raíz de la ecuación dada. En efecto, al sustituir ese valor en la ecuación dada, esta se satisface.

Ejemplo 2: Resolver $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{1+x}{x}$

Recordando que $(x - 3)\,(x + 3) = x^2 - 9^2$ (diferencia de cuadrados)

$\frac{x(x+3)-2(x-3)}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$ Sumando fracciones con distinto denominador.

$$\frac{x^2+3x-2x+6}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$$

$\frac{x^2+x+6}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$ Sabiendo que x ≠ 0, x ≠ 3 y x ≠ -3, se multiplica ambos miembros por "x" y por "$x^2 - 9$".

$x\,(x^2 + x + 6) = (x^2 - 9)\,(1 + x)$ Aplicando propiedad distributiva del producto respecto a la suma algebraica.

$x^3 + x^2 + 6x = x^2 - 9x - 9 + x^3$ Reduciendo términos semejantes

$6x + 9x = -9$ Sumando 9x a ambos miembros de la ecuación

$15x = -9$ Multiplicando ambos miembros por 1/15

$$x = -\frac{3}{5}$$

La ecuación $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{1+x}{x}$ tiene por conjunto solución $S = \{-\frac{3}{5}\}$

Regla

Para resolver una ecuación racional con una incógnita se reducen las fracciones de cada miembro al mínimo común denominador; mediante simplificaciones y pasaje de denominadores se transforma en una ecuación entera. Resuelta ésta, es necesario probar si las raíces halladas satisfacen a la ecuación racional propuesta.

Cuando se resuelven ecuaciones racionales puede suceder que la supresión de los denominadores que contienen a la incógnita haga aparecer raíces extrañas, es decir, números que satisfacen a la ecuación transformada, pero que no satisfacen a la ecuación dada. Por consiguiente, cuando se resuelve una ecuación racional, es necesario verificar siempre la raíz hallada.

Intentar lo siguiente

Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x-3}{x+3} = \frac{4}{5}$ b) $\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2$ c) $\frac{4x}{x^2-4} = \frac{2x}{x+2} - 2$

Exploremos ahora la solución de problemas. Lo que haremos es traducir el enunciado de un problema al lenguaje matemático adecuado, y desarrollar una ecuación que podamos resolver.

3.1.3 Aplicación a la Resolución de Problemas

Reglas para Resolver Problemas
1. Lea el problema. Haga una lista de la información disponible.
2. ¿Qué es lo que se debe determinar? Introduzca una variable y defina lo que representa. En caso de ser posible trace una figura o use una tabla si es necesario.
3. Formule una ecuación.
4. Resuelva la ecuación.
5. ¿Parece razonable la respuesta? ¿Ha contestado usted la pregunta que aparece en el problema?
6. Compruebe su respuesta con la ecuación en el problema original.
7. Describa la solución del problema.

Problema 1: La longitud de la base de un rectángulo es 1 cm menos que el doble de su altura. El perímetro es 28 cm. Determine las dimensiones del rectángulo.

Solución

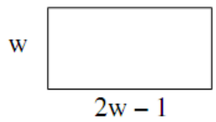
1. *Vuelva a leer el problema y trate de imaginar la situación que se describe. Tome nota de toda la información que se da en el problema.*

La longitud de la base es uno menos que el doble de la longitud de la altura.

El perímetro es 28.

2. *Determine qué es lo que se pide contestar. Introduzca una variable adecuada, que normalmente representa la cantidad que se debe determinar. Cuando sea apropiado, haga una figura.*

Representando la longitud de la altura con w. Entonces, 2w – 1 representa la longitud de la base.



3. *Con la información disponible, forme una ecuación donde intervenga la variable.*

El perímetro es la distancia que se recorre alrededor del rectángulo. Esto proporciona la información necesaria para escribir la ecuación.

$w + (2w - 1) + w + (2w - 1) = 28$

4. *Resuelva la ecuación.*

$w + (2w - 1) + w + (2w - 1) = 28$
$w + 2w - 1 + w + 2w - 1 = 28$
$6w - 2 = 28$
$6w = 30$
$w = 5$

5. *Regrese al problema original para ver si la respuesta obtenida tiene sentido. ¿Parece ser una solución razonable? ¿Quedo contestado lo que pregunta el problema?*

El problema original preguntaba las dos dimensiones. Si la longitud de la altura, w, es 5 cm., entonces la longitud de la base, 2w – 1, debe ser 9 cm.

6. *Compruebe la solución por sustitución directa de la respuesta en el enunciado original del problema.*

Como comprobación, vemos que la longitud de la base del rectángulo, 9 cm., es 1 cm menos que el doble de la altura, 5 cm., tal como lo dice el problema. También, el perímetro es 28 cm.

7. *Por último, describa la solución en términos de las unidades correctas.*

Las dimensiones son: 5 cm. por 9 cm.

Problema 2: Un automóvil sale de cierta población a mediodía, y se dirige hacia el este a 40 kilómetros por hora. A las 13 horas otro automóvil sale de la población, viaja en la misma dirección a una velocidad de 50 kilómetros por hora. ¿Cuántas horas tarda el segundo vehículo en rebasar al primero?

Solución: Con frecuencia, los problemas de movimiento de este tipo parecen difíciles, cosa que no debería ser. La relación básica que debemos recordar es que **la velocidad multiplicada por el tiempo es igual a la distancia** ($r \times t = d$). Por ejemplo, un automóvil viajando a una velocidad de 60 kilómetros por hora, durante 5 horas, recorre $60 \times 5 = 300$ kilómetros.

Necesitamos volver a leer el problema y ver qué parte de la información que ahí aparece puede ayudar a formar una ecuación. Los dos automóviles viajan a distintas velocidades y durante distintos tiempos, pero ambos viajarán la misma distancia desde el punto de partida hasta que se encuentran. La pista es la siguiente: *Representar la distancia que viaja cada uno e igualar estas cantidades.*

Usaremos la x para representar la cantidad de horas que tardará el segundo automóvil en rebasar al primero. Entonces éste, que ha comenzado una hora antes, viaja $x + 1$ horas hasta el punto de encuentro. Es útil resumir esta información en forma de tabla.

	Velocidad	**Tiempo**	**Distancia**
Primer automóvil	40	$x + 1$	$40(x + 1)$
Segundo automóvil	50	x	$50x$

Al igualar las distancias llegamos a una ecuación de la que se puede despejar x:

$$50x = 40(x + 1) \quad \rightarrow \quad 50x = 40x + 40 \quad \rightarrow \quad 10x = 40 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

El segundo automóvil rebalsa al primero en 4 horas. Esta respuesta, ¿parece razonable?

Comprobamos el resultado. El primer automóvil viaja 5 horas a 40 kilómetros por hora, lo que hace un total de 200 kilómetros. El segundo, viaja 4 horas a 50 kilómetros por hora, y se obtiene el mismo total de 200 kilómetros.

Respuesta: El segundo vehículo tarda 4 horas en rebasar al primero.

3.2. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

3.2.1. Ecuaciones Exponenciales

Una **ecuación exponencial** es aquella **ecuación** en la que la **incógnita** aparece en el **exponente**.

Para **resolver una ecuación exponencial**:

1) vamos a tener en cuenta las **propiedades de las potencias** vistas en la Unidad 1 de este material.

2) y la propiedad: Si son potencias de igual base: igualamos los exponentes: $a^b = a^c \Rightarrow$ b = c

3) si no es posible igualar las bases de las potencias, aplicamos logaritmo de base conveniente a ambos miembros.

Ejemplo 1: $2^{x+1} = 32$

Descomponemos en factores para conseguir la misma base: $2^{x+1} = 2^5$

Igualamos los exponentes y resolvemos: x + 1 = 5 entonces x = 4

Ejemplo 2: $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

Aplicamos las propiedades de las potencias para descomponer:

$$\frac{2^x}{2} + 2^x + 2^x.2 = 7$$

Sustituimos 2^x por otra variable y resolvemos la ecuación: t $=2^x$

$\frac{t}{2} + t + 2t = 7 \quad \Rightarrow \quad t + 2t + 4t = 14 \quad \Rightarrow \quad 7t = 14 \quad \Rightarrow \quad t = 2$

Como t $=2^x$, tenemos que: 2 $=2^x$

De donde, igualando las bases, x = 1

Ejemplo 3: $4^x = 15$

Aplicamos logaritmo en base 10 a cada miembro (es posible emplear cualquier otra base):

$\log(4^x) = \log 15$

Por propiedad de los logaritmos: $x\,log\,4 = log\,15 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{log15}{log4} \quad \Rightarrow$ x ≅ 1,95

3.2.2. Ecuaciones Logarítmicas

Una **ecuación logarítmica** es aquella **ecuación** en la que la **incógnita** está afectada por la **logaritmación**.

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

Para resolver una ecuación logarítmica aplicamos:

1) la definición de dicha operación,

2) las propiedades de los logaritmos que vimos en la Unidad 1 de este material,

3) la relación: $log_b A = log_b C \quad \Rightarrow \quad A = C$

Ejemplo 1: log x = 3

Utilizando la definición de logaritmos, tenemos: si log x = 3 $\Rightarrow$ $x = 10^3$ $\Rightarrow$ x = 1000

Ejemplo 2: ln(x+3) = 4

Utilizando la definición de logaritmos, tenemos: si ln(x+3) = 4 $\Rightarrow$ $x + 3 = e^4$
$x = e^4 - 3$ $\Rightarrow$ x ≅ 51,6

Ejemplo 3: $logx^3 = \log 6 + 2\log x$

Aplicando propiedades de la logaritmación:

$logx^3 = \log 6 + \log x^2 \quad \Rightarrow \quad logx^3 = log\ 6x^2$

$x^3 = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x-6) = 0$

Esta última igualdad se verifica si x = 0 o si x = 6.

x = 0 no es solución de la ecuación logarítmica porque no existe el log 0. Entonces la solución de la ecuación es: x = 6.

Ejemplo 4: $e^{lnx^2} = 4$

Por propiedad de los logaritmos: $x^2 = 4$ de donde x = 2 o x = -2

S = {2 , -2}

3.3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Las ecuaciones que tienen más de una incógnita se satisfacen para diferentes sistemas de valores atribuidos a sus letras. Así la ecuación 2x + y = 7 se satisface para infinitos pares de valores atribuidos a "x" y a "y", por ejemplo para:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ etcétera.

Estas soluciones se pueden escribir como pares ordenados, así:

(1, 5) ; (2, 3) ; (4, −1) ; etc.

Cada uno de los pares de valores que satisface a una ecuación con dos incógnitas constituye una solución de esa ecuación.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación de primer grado con dos incógnitas.

$$3x - y = 2y + 15$$

$3x - y - 2y = 15$	Sumando $-2x$ a cada lado de la ecuación
$3x - 3y = 15$	Reduciendo
$3(x - y) = 15$	Sacando factor común
$x - y = 15/3$	Multiplicando ambos miembros por 1/3
$x - y = 5$	

Luego "x" e "y" serán los infinitos pares de números que cumplen la condición de que su diferencia sea 5. Entre ellos:

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 19/3 \\ y = 4/3 \end{cases}$ etcétera.

Como pares ordenados: (8, 3); (3, −2); (−4, −9); (19/3, 4/3); etc.

Cada uno de estos pares de valores es por lo tanto una ecuación, como puede comprobarse al reemplazar en ella "x" e "y", respectivamente, por las componentes de cada uno de esos pares.

Toda ecuación de primer grado con dos o más incógnitas admite infinitas soluciones.

Esta conclusión se expresa también diciendo que la ecuación es ***indeterminada***.

Si escribimos en forma genérica una ecuación de primer grado con dos incógnitas, obtenemos

$$a\,x + b\,y = c$$

donde a, b, y c son números reales que se llaman, respectivamente: coeficiente de x; coeficiente de y, y término independiente. Si se despeja la y se obtiene una función lineal.

En nuestro ejemplo; $3x - y = 2y + 15$, si despejamos la variable y, se obtiene:

$y = x - 5$ representa la ecuación explícita de una recta.

3.4. SISTEMA DE ECUACIONES

3.4.1 Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen las mismas variables se llama sistema de ecuaciones. El conjunto solución de un sistema con dos incógnitas se compone de todos los pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema.

Sabemos que dos recta no paralelas cualesquiera en un plano se cortan exactamente en un punto. Para determinar las coordenadas de dicho punto se plantean las ecuaciones de ambas rectas. A continuación, por ejemplo, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, y sus gráficas trazadas en el mismo sistema de coordenadas.

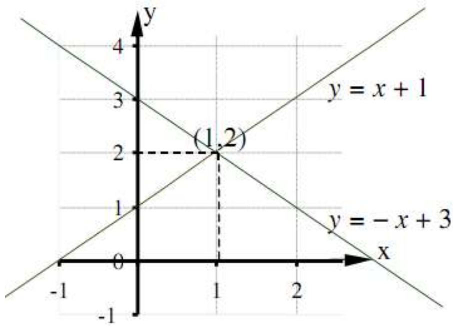
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

La gráfica muestra el conjunto solución del sistema. Su intersección es el par ordenado (1, 2).

Esto se comprueba mediante una sustitución.

x – y = -1
1 – 2 = -1
-1 = -1

x + y = 3
1 + 2 = 3
3 = 3



Puesto que las coordenadas del punto (1, 2) verifican ambas ecuaciones, (1,2) es la solución.

Si un sistema sólo tiene una solución, se dice que es la **única** solución.

3.4.2. Solución de Sistemas de Ecuaciones

Es posible que la representación gráfica no sea un método eficaz y preciso para resolver un sistema de ecuaciones de dos variables. Ahora consideraremos otros métodos más eficientes.

3.4.2.1. Método de Sustitución

Pasos:

1. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema.
2. Se sustituye en la otra ecuación dicha incógnita por la expresión obtenida. De ahí el nombre de método de sustitución.
3. Se resuelve la ecuación con una incógnita, que así resulta.
4. Esta incógnita se reemplaza por el valor obtenido, en la expresión que resultó de despejar la primera y se calcula así el valor de está.

Ejemplo 1: Utilizando el método de sustitución, resolver el siguiente sistema,

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$$

Solución. Comenzamos diciendo que (x , y) son las coordenadas del punto de intersección de este sistema. Los valores de “x” (abscisa) e “y” (ordenada), satisfacen ambas ecuaciones.

Por consiguiente, de cualquiera de las ecuaciones se puede despejar “x” o “y”, luego sustituir lo obtenido en la otra.

PRIMER PASO: Despejemos y de la primera ecuación, pues el coeficiente del término correspondiente es 1:

$y = 6 – 2x$

SEGUNDO PASO: Así “y” y “6 – 2x” son equivalentes. Podemos reemplazar “y” por “6 – 2x” en la segunda ecuación.

$3x + 4y = 4$

$3x + 4 (6 – 2x) = 4$ Sustituyendo “6 – 2x” en vez de “y”

TERCER PASO: Esto da una ecuación de una variable. Ahora podemos resolver para “x”.

$3x + 24 – 8x = 4$ Utilizando la propiedad distributiva del producto respecto a la resta

$−5x = − 20$

$x = 4$

CUARTO PASO: Se sustituye 4 en vez de “x” en cualquiera de las ecuaciones y se resuelve para “y”.

$2x + y = 6$ Escogiendo la primera ecuación

$2 \cdot 4 + y = 6$

$y = −2$

El resultado es el par ordenado (4, −2). Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la solución del sistema.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de sustitución para resolver los siguientes sistemas. Construya los gráficos correspondientes.

a) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3y - 2x = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

4.2.2. Método de Igualación

Pasos:
1. Se despeja una de las incógnitas en las dos ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones obtenidas. De ahí el nombre de método de igualación.
3. Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.
4. Se reemplaza el valor obtenido de esta última incógnita en cualquiera de las dos expresiones que resultaron al despejar la primera, y se obtiene así su valor.

Ejemplo 1: Utilizando el método de igualación, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 10 & [1] \\ 2x + \frac{5}{4}y = 1 & [2] \end{cases}$$

PRIMER PASO: Al aplicar este método, también conviene observar cuál es la incógnita que se despeja más fácilmente en las dos ecuaciones; en este caso es x.

De [1] $\quad x = 10 - 3y \qquad [3]$

De [2] $\quad 2x = 1 - \frac{5}{4}y \quad \to \quad x = \frac{1-\frac{5}{4}y}{2} \qquad [4]$

SEGUNDO PASO: Se igualan los segundos miembros de [3] y [4]

$$10 - 3y = \frac{1 - \frac{5}{4}y}{2}$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en y que se acaba de obtener.

$(10 - 3y)2 = 1 - \frac{5}{4}y \quad \to \quad 20 - 6y = 1 - \frac{5}{4}y$

$-6y + \frac{5}{4}y = 1 - 20 \quad \to \quad -\frac{19}{4}y = -19$

$-y = \frac{(-19)4}{19} \quad \to \quad y = 4$

CUARTO PASO: Se sustituye "y" por su valor, 4, en la expresión [3] o en la [4]. En este ejemplo es más cómodo en la [3].

$$x = 10 - 3 \cdot 4 \to x = -2$$

El resultado es el par ordenado (−2, 4). Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la solución del sistema.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de igualación para resolver los siguientes sistemas. Construya los gráficos correspondientes.

a) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3y - 2x = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

3.4.2.3 Método de Reducción por Suma o Resta

En este método se trata de obtener una ecuación con una sola variable, o eliminar una de las variables, por esto también se lo conoce como método de eliminación.

Pasos

1. Se multiplican las ecuaciones por un número conveniente, para igualar el valor absoluto de los coeficientes de una misma incógnitas, en las dos ecuaciones.
2. Según que dichos coeficientes resulten de igual o distinto signo, se restan o se suman las ecuaciones, con lo que se consigue eliminar dicha incógnita. De ahí el nombre de método de eliminación o reducción.
3. Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.
4. Se reemplaza está por su valor en una de las ecuaciones dadas y se obtiene el valor de la primera incógnita o bien se calcula esta incógnita por el mismo método.

Ejemplo 1: Utilizando el método de reducción o eliminación, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - \frac{5}{3}y = 5 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

PRIMER PASO: Al aplicar el método conviene observar para cuál de las dos incógnitas se pueden igualar con más facilidad los valores absolutos de sus coeficientes.

En este caso es la “x”. Es inmediato que multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 se igualan los coeficientes de “x”.

$$\begin{cases} 6x - 5y = 15 \\ 6x - 8y = 6 \end{cases}$$

SEGUNDO PASO: Como los coeficientes de “x” son iguales en valor absoluto y signo, se restan miembro a miembro las ecuaciones para eliminar los términos en x.

$$-5y - (-8y) = 15 - 6$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en “y” que se acaba de obtener.

$$-5y + 8y = 9 \quad \rightarrow \quad 3y = 9 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

CUARTO PASO: Se reemplaza el valor de $y = 3$, en una de las ecuaciones del sistema dado; en este caso es más cómodo en la segunda.

$$3x - 4 \cdot 3 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x - 12 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x = 15$$

$$x = 5$$

Luego, el conjunto solución es: $S = \{(5, 3)\}$

Ejemplo 2: Resolver el siguiente sistema por el método de eliminación

$$\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 3x - 2y = -20 \end{cases}$$

PRIMER PASO: Se observa en este ejemplo, que basta multiplicar la segunda ecuación por 3 para igualar el valor absoluto de los coeficientes de "y"; el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 9x - 6y = -60 \end{cases}$$

SEGUNDO PASO: Como los coeficientes de y tienen signos contrarios, se suman miembro estas ecuaciones para eliminar y.

$$5x + 9x = 32 - 60$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en x.

$$14x = -28 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

CUARTO PASO: Para calcular y se puede reemplazar este valor $x = -2$ en una ecuación del sistema o bien eliminar la x, multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 5.

$$\begin{cases} 15x + 18y = 96 \\ 15x - 10y = -100 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro

$$18y - (-10y) = 96 - (-100) \quad \rightarrow \quad 28y = 196 \quad \rightarrow \quad y = 7$$

Luego la solución del sistema es: $S = \{(-2, 7)\}$

Intentar lo siguiente

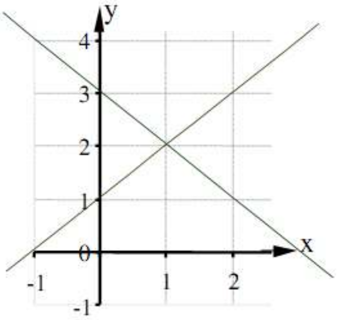
Utilizar el método de eliminación para resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ 2x + 7 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + y = 5{,}75 \end{cases}$

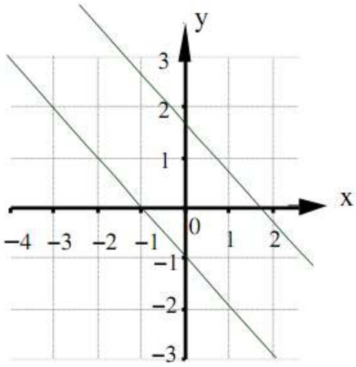
Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

3.4.3. Interpretación Geométrica de las Distintas Soluciones

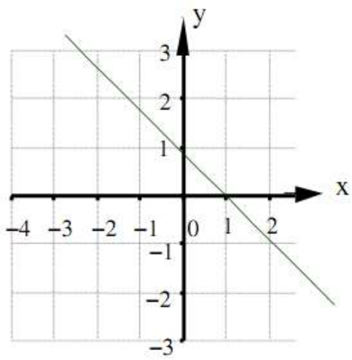
Las gráficas de dos ecuaciones lineales pueden ser dos rectas que se intersecan. También pueden ser dos rectas paralelas o una misma recta.



Dos rectas que se intersecan.
Solución única.



Rectas paralelas
No hay solución.

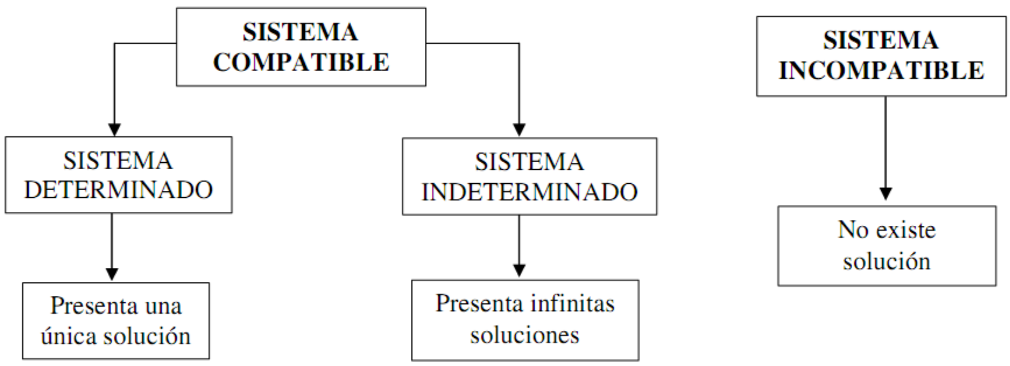


Una misma recta.
Infinitas soluciones.

3.4.4. Sistemas Compatibles y Sistemas Incompatibles

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, es encontrar él o los valores que satisfacen simultáneamente las ecuaciones. Es decir al reemplazar los valores hallados, convierte cada ecuación en una afirmación verdadera. Si no se puede hallar esos valores, significa que no existe ningún valor que lo satisfaga, el sistema se dice que es incompatible o inconsistente. Si el sistema presenta solución se dice que es compatible o consistente.

Mediante un diagrama presentaremos las distintas situaciones que pueden existir:



Si un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución, decimos que es **compatible** o **consistente**.
Si un sistema no tiene solución, decimos que es **incompatible** o **inconsistente**.

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es compatible o incompatible.

$$\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ -2x + 6y = 5 & [2] \end{cases}$$

Intentamos encontrar una solución. Multiplicamos [1] por 2 y sumamos el resultado a [2] (método de eliminación)

$$\begin{cases} 2x - 6y = 2 & 2.[1] \\ -2x + 6y = 5 & [2] \end{cases}$$

De donde se obtiene:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ 0 = 7 & 2.[1] + [2] \end{cases}$$

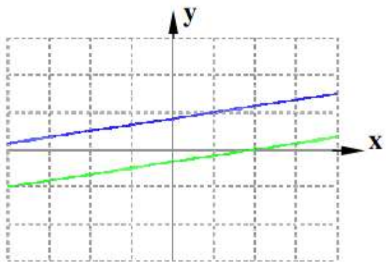
La última ecuación dice que $0\,x + 0\,y = 7$. No hay valores que puedan asumir las variables para los que esto sea cierto, de modo que no hay solución. El sistema es **inconsistente**.

Podemos considerar el problema gráficamente. Las formas **pendiente** – **ordenada al origen** de las ecuaciones originales son:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \qquad [1]$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \qquad [2]$$

Podemos ver que las rectas son paralelas. Las pendientes son iguales y las ordenadas al origen son distintas. No tienen punto de intersección, de modo que el sistema es inconsistente Si al resolver un sistema de ecuaciones llegamos a una ecuación que es a todas luces falsa, tal como 0 = 7, entonces el sistema es inconsistente.



Intentar lo siguiente

Determinar si los siguientes sistemas son consistentes o inconsistentes.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

3.4.4.1. Sistemas Compatibles Indeterminados

Sistemas Compatibles Indeterminados o Dependientes
Si un sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones, decimos que el sistema es indeterminado o dependiente.

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & [1] \\ 4x + 6y = 2 & [2] \end{cases}$$

Si multiplicamos a [1] por -2 y sumamos el resultado a [2] obtenemos

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & [1] \\ 0 = 0 & -2\,.[1] + [2] \end{cases}$$

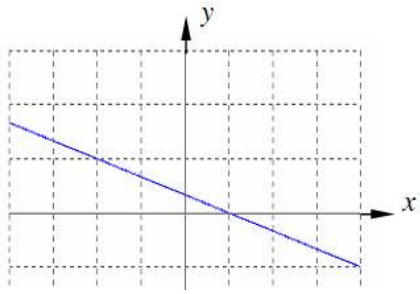
La última ecuación dice que $0\ x + 0\,y = 0$. Esto es verdad para todos los valores que puedan asumir las variables. El sistema es indeterminado.

También podemos considerar el problema gráficamente. La forma pendiente – ordenada al origen de las ecuaciones son

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \qquad [1]$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \qquad [2]$$

Las ecuaciones en la forma pendiente – ordenada al origen de las rectas son iguales. Esto significa que las gráficas son la misma. Este sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones. Cada punto de la recta con ecuación $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ tiene coordenadas que constituyen una solución. El sistema es **indeterminado**.



Intentar lo siguiente

Determinar si los siguientes sistemas son indeterminados.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

TRABAJO PRÁCTICO UNIDAD 3

ECUACIONES DE PRIMER GRADO - SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1. Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones. Compruebe las soluciones:

a) $2{,}5x+0{,}5x=1{,}5x+1{,}5$

b) $15y-(3-(4y+4)-57)=2-y$

c) $(6x+2)\cdot(5x-4)-30(x-1)=34x+106$

d) $6x^2-27x+72=3x(2x+3)$

e) $5(x-7)+7(x+7)=42$

f) $(2x-5)(3x-7)-(3x-5)(2x-7)+30=5x$

g) $\frac{1}{2}(4x+6)=\frac{1}{5}(15x+20)$

h) $\frac{4x-6}{12}-\frac{3x-8}{4}=\frac{2x-9}{6}-\frac{x-4}{8}$

i) $1-x^2-\frac{3x+1}{2}=-\frac{x^2}{4}+5x-\frac{3x^2}{4}$

j) $\frac{8}{5}x-\frac{3}{2}x+\frac{5x^2-3}{10}=\frac{2x^2-1}{4}$

2. Resolver e indicar para cada ecuación si es: compatible (determinada o indeterminada) o incompatible:

a) $(s+1)(3s+1)=3s^2+7s-13$

b) $(x-3)^2+6x-24=(x+3)^2-6x-24$

c) $\frac{t+3}{2}-4+\frac{1}{2}(t-1)=(2-t)^2-7-t^2$

d) $\frac{x-3}{2}-\frac{1}{4}(2x+3)-x=(1+x)-\frac{5}{4}$

e) $3x-2=3x+2$

3. Analizar que ocurre cuando:

a) $k=-8/5$, $4(3x)+5kx=3k+1+4x$;

b) $k=4/3$, $3kx-x-3x=k-6$

4. Resolver las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{4}{x^2-9}.\frac{x^2+6x+9}{x+3}=2$

b) $\frac{5x}{(2x+5)^2}+\frac{3x-2}{4x^2-25}=0$

c) $\frac{24}{x^2-16}+\frac{5}{x+4}=\frac{3}{x-4}$

d) $\frac{x^2}{x^2+2x}=3$

e) $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}=x+1$

f) $\frac{3x}{x+7}-\frac{8}{5}=0$

g) $\frac{2x-5}{x+1}-\frac{3}{x^2+x}=0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Compruebe sus soluciones. Indique el conjunto solución:

a) $2^{2x-1}=8$

b) $4^{3x}=16^x$

c) $\sqrt[2x-1]{5^{x-3}}=\sqrt{125}$

c) $3^x.3+3^x+3^{x-1}=27$

d) $4^{x+3}=7^{x-1}$

e) $\ln x-\ln(x-2)=1$

f) $log_3(x+4)+log_3(x-4)=2$

g) $2log_2(x^2)\quad-2log_2(-x)=4$

h)$\log 2+\log(11-x^2)=2\log(5-x)$

i) $lnx^2-lnx+ln3=\frac{1}{2}ln4$

7. Se propone a continuación una serie de problemas cuyas condiciones pueden formularse en términos de ecuaciones lineales:

a) Hallar un número sabiendo que da igual resultado si se le suma 5 que si se lo multiplica por 5.

b) ¿De qué número ha de restarse 6/5 para que la diferencia sea igual a su quinta parte?

c) Si a un número se lo multiplica por 3, al producto se le suma 5 y a la suma se la divide por 2, da igual que si se lo multiplica por 5, al producto se le sumara 4 y a la suma se la dividiera por 3. ¿Cuál es ese número?

d) Un padre tiene 30 años y su hijo 2 años. ¿Cuántos años deberán transcurrir para que el padre tenga 8 veces la edad del hijo?

e) Una persona gasta 1/3 de su dinero y luego 2/5 de lo que le queda; tiene aún $60. ¿Cuánto tenía al principio?

Secretaría Académica F.C.E.Q. y N. – U.Na.M.: Tel. 376 – 4435099 / 4422186 int. 148
academica@fceqyn.unam.edu.ar // ingreso@fceqyn.unam.edu.ar

f) La quinta parte de un número más 4 es igual a 1/3 menos el duplo de dicho número. ¿Cuál es el número?

g) Encontrar dos números pares consecutivos tales que dos veces el primero más tres veces el segundo sea 76.

h) Si a un número se le suma su tercera parte y a este resultado se le resta el mismo número aumentado en 5, se obtiene 1. ¿Cuál es dicho número?

i) La mitad de un número, más la tercera parte de su consecutivo, más la octava parte de siguiente, es igual a este número. ¿Cuáles son los números?

j) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuyo perímetro es 10 cm mayor que el de un rectángulo de largo igual al lado del cuadrado y de ancho igual a 4 cm?

k) Las ruedas delanteras y las traseras de un cierto vehículo tienen 0,8m y 1,1 m de diámetro respectivamente. Calcular la distancia recorrida si las ruedas delanteras dieron 450 vueltas más que las traseras.

l) Una habitación es 3 veces más larga que ancha y tiene un perímetro de 96 m. ¿Cuáles serán sus medidas?

m) El precio de un artículo se aumentó en un quinto y resultó entonces el 0,75 de $160. ¿Cuál era su precio inicial?

n) El precio de un ventilador se rebaja un 20%. El ventilador se vende entonces a $480., o sea, un 20% más que el precio de coste, ¿cuál es el precio de venta sin rebaja y el precio de coste?

ñ) Si el 50% de x, más el 10% de x es el 12,5% de 480, calcular x.

o) Un rectángulo es 2 metros más ancho que un cierto cuadrado, 6 metros más largo que él y tiene un área 84 m^2 mayor que la de dicho cuadrado. Hallar las dimensiones de las dos figuras.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

1. Resolver, clasificar y graficar, los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x - 0{,}5y = 0 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3y - 4x - 1 = 0 \\ 3x = -4y + 18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 5 = 4x - 6y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x\sqrt{3} - 3y = \sqrt{3} \\ x + y\sqrt{3} = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 10 - 2x \\ 8x - 2 = 2y \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sqrt{5}x - 5y = \sqrt{5} \\ x - \sqrt{5}y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y - 1 = 2 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 3x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$

2. Determinar que en los casos siguientes se cortan las dos rectas dadas y hallar el punto de intersección:

a) x + 5y – 35 = 0, 3x + 2y –27 = 0

b) 3x + 5 = 0, y – 2 = 0

3. Demostrar que en los casos siguientes son paralelas las dos rectas dadas:

a) 2x – 4y + 3 = 0, x – 2y = 0

b) 2x –1 = 0, x + 3 = 0

c) y + 3 = 0, 5y –7 = 0

4. Demostrar que en los casos siguientes coinciden las dos rectas dadas:

a) 3x + 5y – 4 = 0, 6x + 10y – 8 = 0

b) $x - \sqrt{2}y = 0$, $\sqrt{2}x - 2y = 0$

c) $\sqrt{3}x - 1 = 0$, $3x - \sqrt{3} = 0$

5. Encontrar la ecuación de una recta que pasa por (3, –4) y tiene pendiente –2. Si la recta contiene a los puntos (a, 8) y (5, b); encuentre a y b. (Ver Unidad 2)

6. Determinar para que valores de α y β las dos rectas:

$$\alpha x - 2y - 1 = 0 \;;\; 6x - 4y - \beta = 0$$

a) tienen solución única

b) tienen infinitas soluciones

c) no tienen solución.

d) en cada caso, escriba el conjunto solución.

7. Se da el sistema: $\begin{cases} 2x + ay = 13 \\ x - y = -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de “a” la solución es (2, 3)?

b) ¿Para qué valor de “a” el sistema no tiene solución?

c) ¿Para qué valores de “a” el sistema tiene infinitas soluciones?

8. a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto de intersección de las rectas 2x– y +1= 0; 3x + 2y = 0 y tiene pendiente 2. b) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el mismo punto.

9. Sabiendo que $log_2\ (x + 2y) = 5$ y que $log_2\ (x + y) = 3$. Se pide:

a) Determinar x e y. b) Hallar $log_2\ (x + 2y)(x + y)$

10. Resolver los siguientes problemas:

a) La suma de dos números es – 42. El primero de ellos menos el segundo es 52. ¿Cuáles son los números?

Rta.: x =5 ; y = − 47

b) La diferencia entre dos números es 16. Tres veces el mayor de ellos es nueve veces el más pequeño. ¿Cuáles son los números? Rta.: x =24 ; y = 8

c) La suma de dos números naturales es 98 y al dividir el mayor por el menor el cociente es 7 y el resto 10. ¿Cuáles son los números?

d) Cuando pagaste una cuota de $120 del viaje de estudios utilizaste 15 billetes de $ 5 y $10. ¿Cuántos billetes de cada denominación entregaste? Rta.: 6 billetes de $5; 9billetes de $10

e) A una reunión asistieron 200 personas entre hombres y mujeres, habiendo pagado los hombres $40 por cada entrada y las mujeres $20. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres habían si en total recaudaron $5860?

f) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°. Si el menor de los ángulos mide la mitad del mayor y 14° grados menos que el intermedio. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?

g) Un hotel de dos pisos tiene 54 habitaciones. Si las del primero duplican en número a las del segundo, ¿cuántas habitaciones tiene cada uno?

h) Juan y Carlos son profesores. En total llevan 46 años dando clases. Hace dos años, Juan llevaba 2,5 veces los años que tenía Carlos como profesor. ¿Cuántos años llevan en la enseñanza cada uno de ellos?

Rta.: 32 y 14

i) El dígito de las decenas de un entero positivo de dos dígitos es 2 más que tres veces el dígito de las unidades. Si los dígitos se intercambia, el nuevo número es 13 menos que la mitad del número dado. Averigua el entero dado.(Sugerencia: sea x = dígito de las decenas e y = dígito de las unidades, entonces 10x + y es el número).

Rta.: 82

j) El perímetro de un rectángulo es 86cm. El largo es 19 cm más grande que el ancho. Calcular el largo y el ancho.

Rta.: l =31 , a = 12

EJERCICIOS DE ENTRENAMIENTO

1. Si a un número disminuido en 2 se lo divide por 4 y al resultado se le resta 5, se obtiene la mitad de ese número aumentada en 37. ¿Cuál es el número?.

2.

$$\text{Sea}: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x = 4 - y \end{cases}$$

a) Resuelva el sistema dado en forma analítica.

b) Obtenga la pendiente de la primera recta y grafíquela.

c) ¿Es cierto que la segunda recta intercepta al eje *"y"* en **- 4**. Justifique su respuesta.

3.

$$\text{Sea}: \begin{cases} 2x - 5y = 1 - \frac{5}{2}y \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$$

Pruebe si $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right)$ es solución del sistema dado. En caso afirmativo determine si esa es la única solución o admite otras. Clasifique el sistema.