# ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

Margarita del Carmen Benítez
Manuel Alejandro Verón

Colección: Cuadernos de Cátedra

Facultad de Ciencias Exactas,
Químicas y Naturales

Benítez, Margarita del Carmen
Elementos de matemática / Margarita del Carmen Benítez ; Manuel Alejandro Verón.
- 2a ed. - Posadas : Universidad Nacional de Misiones, 2023.
Libro digital, PDF - (Cuadernos de cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-766-220-1

1. Matemática. 2. Educación Universitaria. I. Verón, Manuel Alejandro. II. Título.
CDD 510.711

# INDICE

Introducción .... 4

Unidad 1. Nociones de Lógica y Conjuntos .... 4

Introducción .... 4

Proposiciones .... 4

Función Proposicional .... 5

Cuantificadores .... 6

Negación de funciones proposicionales cuantificadas .... 7

Conectivos Lógicos: .... 8

Negación .... 9

Conjunción: .... 10

Disyunción incluyente: .... 11

Disyunción excluyente o Diferencia simétrica .... 12

Implicación o Condicional: .... 13

Doble Implicación o Bicondicional: .... 14

Proposiciones y Tablas de Verdad .... 15

Criterio para la construcción de la tabla .... 15

Noción de Conjunto: .... 16

Notación .... 16

Definición por Extensión y por Comprensión .... 17

Pertenencia .... 18

Conjunto Finito e Infinito .... 18

Conjunto Vacío .... 19

Conjunto Unitario: .... 19

Conjunto de los Números NATURALES .... 20

Conjunto de los Números ENTEROS .... 20

Conjunto de los Números RACIONALES .... 21

Representación de los Números en la Recta .... 22

Conjunto de los Números REALES .... 22

Conjunto de los Números COMPLEJOS .... 23

Propiedades de la Inclusión de Conjuntos .... 24

Igualdad entre Conjuntos .... 25

Conjuntos disjuntos .... 25

Unión de Conjuntos: $A \cup B$ .... 26

Intersección de Conjuntos: $A \cap B$ .... 26

Complemento de un Conjunto: $A^c$ .......... 27
Diferencia de Conjuntos: .......... 27
Diferencia Simétrica: .......... 27
Actividades Propuestas .......... 29
*Para seguir avanzando!* .......... 29
Bibliografía: .......... 32
Unidad 2. Números Reales .......... 33
Correspondencia entre Números Reales y los Puntos de la Recta .......... 47
Distancia entre números reales .......... 47
Intervalos de números reales. Intervalos de una recta real .......... 47
Entorno de un punto de la recta real. .......... 49
Actividades Propuestas .......... 56
*¡Para seguir avanzando!* .......... 56
Unidad 3. Polinomios. ecuaciones. sistemas de ecuaciones. .......... 60
Definición de polinomio. .......... 60
Operaciones en el Conjunto de Polinomios en una variable Real. .......... 63
Suma de polinomios. .......... 63
Resta de polinomios. .......... 64
Producto de polinomios. .......... 64
División de polinomios. .......... 66
Consecuencia de la división: .......... 67
División sintética. Regla de Ruffini. .......... 68
Factorización de Polinomios. Teorema del factor. Teorema del resto. .......... 69
Ecuaciones Racionales. .......... 74
Método de suma y resta .......... 75
Unidad 4. Nociones de Trigonometría y Números Complejos .......... 80
Ángulo .......... 80
Ángulo positivo – ángulo negativo .......... 81
Medición de ángulos .......... 81
Sistema sexagesimal: .......... 81
Formas equivalentes de escribir un ángulo: .......... 82
Sistema circular: .......... 83
Longitud de arco. .......... 85
Equivalencias entre grados sexagesimales y radianes .......... 86
Conversión entre sistemas: .......... 87

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS . 87
Relación de la tangente en función del seno y el coseno ........................................................ 90
Ángulos especiales ...................................................................................................................... 90
Relación Fundamental de la Trigonometría ............................................................................. 93
Relaciones Trigonométricas Inversas ......................................................................................... 93
Potencias de la unidad imaginaria ............................................................................................. 99
Conjugado de un número complejo ......................................................................................... 100
Cociente de números complejos en forma binómica ............................................................. 100
El plano complejo ...................................................................................................................... 101
Bibliografía ................................................................................................................................. 102
*¡Para seguir avanzando!* .......................................................................................................... 102

## Introducción

La asignatura **Elementos de Matemática (EM)** constituye, para el ingresante a las carreras Ingeniería Química (IQ) y Lic en Análisis Químicos y Bromatológicos (LAQYB) un primer contacto con la matemática universitaria, es decir, el estudio y el uso de las herramientas básicas de la matemática.

Su ubicación espacio-temporal se constituye en un verdadero desafío y al mismo tiempo le otorga una interesante oportunidad.

Desafío, porque debe trabajar con los conocimientos previos que traen los estudiantes del nivel secundario adecuándolos al perfil requerido en las carreras de ingenierías donde el cálculo ocupa un lugar importante. Pero, fundamentalmente, lograr que los jóvenes aprendan a estudiar matemática y se introduzcan en el pensamiento matemático que seguirán desarrollando en Análisis I y a lo largo de toda la carrera.

Oportunidad, porque a través de **EM** se busca que los estudiantes perciban la potencia de la matemática como herramienta para el estudio de fenómenos y problemas de tipo cuantitativo como los que ocupan a la física, la química, la ingeniería, entre otras.

**El Cuaderno de Cátedra Elementos de Matemática** es una herramienta para el estudio de la asignatura y eje vertebrador de las actividades a desarrollar en las clases, abordando las cuestiones necesarias de conocer, analizar y profundizar para poder avanzar en los conocimientos matemáticos requeridos en un nivel universitario.

La presentación teórico-práctica refleja la metodología adoptada para el trabajo en las clases presenciales y se constituye en una guía para el desarrollo de los conceptos y las actividades durante las mismas, donde la actividad matemática estará coordinada por profesores.

El tratamiento de los conceptos se da en forma sintética y, de ningún modo se intenta reemplazar a la bibliografía existente sobre los temas aquí tratados, se aconseja al estudiante recurrir permanentemente a dichos textos matemáticos para profundizar y/o ampliar los mismos, con el fin de lograr un mejor aprendizaje. Fundamentalmente persigue el desarrollo de competencias básicas para un futuro ingeniero: el estudio y trabajo autónomo para lo cual se presenta una propuesta de ejercicios y problemas "para seguir avanzando".

En la unidad 1. Nociones de lógica proposicional y conjuntos numéricos, se trabaja el concepto de proposición, las operaciones proposicionales, sus leyes y cuantificadores. Operaciones con conjuntos y propiedades de conjuntos numéricos.

En la unidad 2. Se estudia el conjunto de los números reales, sus propiedades algebraicas y de orden, las operaciones en R, ecuaciones e inecuaciones, distancia, sumatoria.

En la unidad 3. Polinomios. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Se revisan los conceptos y definiciones de polinomios, grado, como se ordenan, completan y factorizan. Se resuelven ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En la unidad 4. Sistemas de medición de ángulos, uso de la calculadora científica, funciones trigonométricas y relaciones entre las funciones trigonométricos de ángulos agudos en triángulos rectángulos, y nociones básicas de Números Complejos, sus propiedades y operaciones básicas.

En todos los capítulos se da un breve abordaje de conceptos acompañados de ejemplos, se presentan algunas definiciones y **actividades de estudio** que se han organizado según el procedimiento que se espera realicen los estudiantes y caracterizados por “iconos” particularizados de la siguiente manera:

 para ser resueltas en clase.

 para estudiar, profundizar.

 para analizar en base a propiedades, definiciones, teoremas.

Cabe destacar que este Cuaderno, deriva del proyecto de investigación código 16Q597 *“Relaciones entre innovaciones curriculares y procesos de mejora en las prácticas de enseñanza y en los aprendizajes de los estudiantes. La cátedra Elementos de Matemática en el contexto de la adecuación del ingreso en la FCEQyN”.* Un proceso de reflexión- acción al interior de la cátedra Elementos de Matemática de IQ; involucrando a docentes y auxiliares de la misma; el mismo se inicia en 2015 con la *Adecuación al Sistema de Ingreso para Ingeniería Química (Res. N°457/14)* que plantea una innovación curricular: quitar el cursillo y el examen de ingreso de IQ, posibilitando a los aspirantes iniciar su carrera cursando dos asignaturas del plan de estudio: Elementos de Matemática e Introducción a la Ingeniería Química.

Como producción de ese compromiso nace la primera edición del cuaderno de estudio. Participaron del Proyecto: Mgter. Prof. Margarita del C. Benítez, Ing. Nora Freaza, Prof. Bárbara Ivaniszyn, Prof. Alejandro Verón, colaboró: Mg. Claudia Lagraña.

En esta oportunidad presentamos la 2da Edición, luego de los ajustes derivados de su utilización en el aula durante cinco años.

Se espera que los resultados del trabajo contribuyan a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes.

# UNIDAD 1. NOCIONES DE LÓGICA Y CONJUNTOS

## NOCIONES DE LÓGICA PROPOSICIONAL

### Introducción

El objeto de estudiar **lógica proposicional** es conocer los métodos para distinguir el razonamiento válido del incorrecto. Esto nos interesa debido a que el estudio de las Matemáticas exige razonar en forma válida acerca de objetos abstractos. Una aproximación al lenguaje formal es posible mediante el uso adecuado de los elementos de la lógica proposicional. Esto nos permite introducir símbolos y conectivos para construir expresiones formales con estructura lógica válida, descartando las contingencias y optimizando pensamiento.

En esta unidad introduciremos el concepto de proposición, las operaciones proposicionales, sus leyes y la cuantificación de funciones proposicionales. También se tratará en qué casos una condición es necesaria y suficiente, y cuándo un razonamiento es válido.

### Proposiciones

Consideremos las siguientes oraciones:

a) ¡Corre!
b) 2 es número primo.

De la primera no se puede decir si es verdadera o falsa, ya que es imperativa; en cambio (b) es verdadera.

> ***Proposición*** *es una expresión declarativa con sentido en un lenguaje, que afirma o niega algo, proporciona una información, y se caracteriza por el hecho de ser verdadera o falsa.*

Para denotar proposiciones se utilizan letras: p , q , r , ...

Por ejemplo: p = Posadas es capital de Misiones.

q = 5 es menor que 3.

La veracidad o falsedad de un enunciado se denomina ***valor de verdad*** o *valor lógico*, de la proposición y se simboliza mediante *"𝒱"* .

De los ejemplos, tenemos

$\mathscr{V}(p) = V$ y $\mathscr{V}(q) = F$

**1.** ¿Los siguientes enunciados son proposiciones? En el caso de serlo, indicar el valor de verdad de cada una de ellas.

a) 5 es número par.
b) ¿llueve?
c) Los triángulos equiláteros no tienen tres lados congruentes.
d) 2 + 2 = 3
e) -5+2
f) Cierre la puerta, por favor.

## FUNCIONES PROPOSICIONALES Y SU CUANTIFICACIÓN

### Función Proposicional

Para hacer referencia a una propiedad o característica general de un conjunto, en matemática, se utilizan expresiones de la forma P(x), llamadas ***predicados***, referidas a un elemento indeterminado perteneciente a un conjunto.

Así, a todo elemento ***x*** de un conjunto se puede asociar un predicado P(x), el cual tomará uno u otro valor de verdad, dependiendo de ***x***.

Ejemplo: para hacer referencia al conjunto de los números enteros (Z) impares, se escribe en forma simbólica:

$$P(x)\text{: } x \in Z,\ x \text{ es impar}$$

Esta expresión no es una proposición, pues no es posible determinar la verdad o falsedad del enunciado, a menos que otorguemos un valor a x.

P (2) : 2 es impar **F** P (3) : 3 es impar **V**

Para cada valor dado a x, se tendrá una proposición. A expresiones de este tipo se las llama *Funciones* o *Esquemas Proposicionales.*

> ***Función proposicional*** *en una variable* ***x,*** *es toda oración en la que figura* ***x*** *como sujeto, la cual se convierte en proposición al especificar* ***x.***

Existen funciones proposicionales con dos indeterminadas. Por ejemplo, en el conjunto de los Naturales (N), la función:

P (x , y): x es divisor de y

Esta función proposicional pasa a ser proposición cuando se particularizan los valores de x e y.

P (2 , 6): 2 es divisor de 6 **V**  P (5 , 12): 5 es divisor de 12 **F**

**2.** Si es posible, **asignar** a las variables que aparecen en las siguientes expresiones un valor real de modo que resulten proposiciones verdaderas.

a) $x^2 + 4$
b) $2t - 1 \geq 3$
c) Un triángulo isósceles.
d) $3\,z + 2 = \frac{2}{3}$

## Cuantificadores

Si P(x) es una función proposicional definida sobre un conjunto, entonces P(x) puede ser V para todos los elementos del conjunto, para algunos o para ninguno de ellos.

Por ejemplo:

Si *para todo x*, se verifica P(x) se denota mediante **∀ x : P(x)**

En cambio

Si *existe x*, tal que se verifica P(x) se denota mediante **∃ x / P(x)**

El símbolo ∀ se llama cuantificador universal y ∃ se llama cuantificador existencial.

***La función proposicional cuantificada adquiere el carácter de proposición****. La primera se convierte en una proposición por generalización; la segunda, se convierte en una proposición por particularización.*

Por ejemplo:

(1)"Todos los números enteros son pares" se escribe ∀ x ϵ Z : x es par

(2) "Existen enteros negativos" se escribe ∃ x ϵ Z / x < 0

**3. Cuantificar** existencialmente y universalmente las funciones proposicionales de la actividad 2. Y **expresarlas** en forma coloquial.

**4. Determinar** el valor de verdad de las siguientes proposiciones y expresarlas coloquialmente.

a) $\forall\, x \in R : \ x^2 = 0$
b) $\forall\, x \in R : \ x^2 \neq 0$
c) $\exists\, x \in R \,/\, x^2 \geq 0$
d) $\forall\, a, b \in R : \ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

## Negación de funciones proposicionales cuantificadas

La negación de (1) es:

"No todos los enteros son pares", simbólicamente:

$$\sim[\ \forall\, x \in Z : x \text{ es par}] \equiv \exists\, x \in Z \,/\, x \text{ no es par}$$

que expresa: "Existen enteros que no son pares"

La negación de (2) es:

"No existen enteros negativos", simbólicamente

$$\sim[\exists\, x \in Z \,/\, x < 0] \equiv \forall\, x \in Z : x \geq 0$$

Es decir, que "Todo entero es no negativo" o "Todo entero es positivo o cero"

En símbolos

*Para negar una función proposicional cuantificada universalmente se cambia el cuantificador en existencial y se niega la función proposicional.*

$$\sim [\forall\, x : P(x)\,] \Leftrightarrow \exists\, x \,/ \sim P(x)$$

*Para negar una función proposicional cuantificada existencialmente se cambia el cuantificador en universal y se niega la función proposicional.*

$$\sim [\exists\, x \,/\, P(x)] \Leftrightarrow \forall\, x : \sim P(x)$$

Observación: cuando existe un solo elemento que posee una determinada propiedad. Se emplea la notación

**$\exists!\, x \,/\, P(x)$** que se lee "Existe un y solo un x, tal que P(x)"

**5. Expresar** en forma simbólica (cuando sea necesario), luego negar las proposiciones. Determinar el valor de verdad en cada caso.

a) Todos los números naturales son opuestos a los enteros negativos.
b) Existe un racional de la forma a/b tal que $(a/b)^{-1}$ es negativo.
c) $\forall\, x \in R : x^2 = 0$
d) Todo número impar es divisible por 3.
e) $\forall\, x \in R : x^2 \neq 0$
f) $\exists\, x \in R \,/\, x^2 \geq 0$

## PROPOSICIONES SIMPLES Y COMPUESTAS

**<u>Proposición Simple</u>**: Son las que no pueden reducirse a otras más sencillas, no tienen conectivos. Por ejemplo: "María baila".

**<u>Proposición Compuesta</u>**: Son las que pueden reducirse a otras más sencillas. Se reconocen por estar compuesta de dos o más proposiciones simples "ligadas" por conectivos lógicos, por ejemplo: "Pedro estudia y Juan duerme".

## Conectivos Lógicos:

Los *conectivos lógicos* son elementos que se usan para enlazar varias proposiciones o para modificar el valor de verdad de una proposición.

En la **<u>Tabla</u>** se indican los conectivos lógicos, la operación a la que se asocian y la forma de lectura del mismo:

| Conectivo | Operación asociada | Significado |
|---|---|---|
| $\sim$ | Negación | no |
| $\wedge$ | Conjunción | Y |
| $\vee$ | Disyunción incluyente | y/o |
| $\Delta$ | Disyunción excluyente | o *esto* o *lo otro*, pero no ambos |
| $\Rightarrow$ | Implicación | si …... entonces ...... |
| $\Leftrightarrow$ | Doble implicación | ...... si y sólo sí ..... |

Observación: algunos textos utilizan otros símbolos lógicos para los conectivos “y”, “o” y “no” . Por ejemplo:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| p & q | p . q | pq | para | $p \wedge q$ |
| | p + q | | para | $p \vee q$ |
| p’ | $\overline{p}$ | $\neg p$ | para | ~p |

Un recurso para determinar la verdad y falsedad de proposiciones compuestas son las **tablas de verdad** donde se vuelcan todas las posibilidades de valor de verdad de las proposiciones simples que la componen puesto que el valor de verdad de una proposición compuesta depende del valor de verdad de las mismas.

**6.** En las siguientes proposiciones compuestas, identificar a las proposiciones simples que la componen y luego escribirlas en forma simbólica.

a) Está lloviendo y no está lloviendo.
b) Está lloviendo o no está lloviendo.
c) 1 no es mayor a 2 y es impar.
d) Hace calor y hay humedad, entonces va a llover.
e) Dos números son positivos sí y solo si su producto es positivo.

## OPERACIONES PROPOSICIONALES

# Negación

La negación de una proposición **p** es otra proposición **~p** que niega lo que afirma **p**, o viceversa. La negación cambia el valor de verdad de la proposición original.

Se representa por **~p** y se lee **“no p “.**

Tabla de verdad

| p | ~p |
|---|---|
| **V** | **F** |
| **F** | **V** |

Por ejemplo: q = *5 es un número impar*

$\sim q$ = *5 no es un número impar* o bien

$\sim q$ = *no es cierto que 5 sea un número impar* o bien

$\sim q$ = *5 es un número par*

---

Observación: La negación de "el mar es azul" es "el mar no es azul", decir "el mar es verde" no es la negación de la primera, sino una nueva proposición.

---

## Conjunción:

Dos proposiciones pueden combinarse por medio de la "y" para conformar una proposición compuesta que se denomina la *conjunción* de las proposiciones originales.

En símbolos **$p \wedge q$** que se lee **" p y q "**

Ejemplo: *"yo canto y bailo"*

p = yo canto q = yo bailo , $p \wedge q$ = yo canto y bailo

¿Cuántas posibilidades de acción se pueden dar? **Analizar** el valor de verdad de $p \wedge q$ relacionándola al cumplimiento de la acción. **Confeccionar** la tabla de verdad para la conjunción, a partir de lo analizado.

Tabla de verdad

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | |
| **V** | **F** | |
| **F** | **V** | |
| **F** | **F** | |

Nota: la conjunción es verdadera únicamente cuando las proposiciones simples que la conforman son verdaderas, en cualquier otro caso la conjunción es falsa.

**7**. Juan promete lo siguiente a un compañero: “te presto el libro y te presto los apuntes”.

a) Identificar las proposiciones simples que componen a la proposición compuesta.
b) Escribir la proposición compuesta en lenguaje simbólico.
c) En relación a lo prometido, ¿de cuántas maneras diferentes puede obrar Juan? ¿En cuáles de ellas cumple su promesa?

## Disyunción incluyente:

Dos proposiciones pueden combinarse por medio de la “**o**” (en el sentido de “**y/o**”) conformando una proposición compuesta denominada *disyunción incluyente* o simplemente *disyunción* de las proposiciones originales.

En símbolos **$p \vee q$** que se lee **“ p o q ”**

Ejemplo: Lizy dice *“compartiré mis apuntes o los libros que ya no utilice”*

p = compartiré mis apuntes q = compartiré libros que ya no utilice.

$p \vee q$ = compartiré mis apuntes o libros que ya no utilice.

¿De cuántas maneras distintas podría obrar Lizy? **Analizar** el valor de verdad de $p \vee q$ relacionándola al cumplimiento de la promesa. Confeccionar la tabla de verdad para la disyunción a partir de lo analizado.

Tabla de Verdad

| P | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | |
| **V** | **F** | |
| **F** | **V** | |
| **F** | **F** | |

Nota: la disyunción es falsa únicamente cuando las proposiciones simples son simultáneamente falsas, en cualquier otro caso es verdadera.

8. Luis promete lo siguiente a su hermano: “te presto dinero o te pago la entrada al recital”.

a) Identificar las proposiciones simples que componen a la proposición compuesta.
b) Escribir la proposición compuesta en lenguaje simbólico.
c) En relación a lo prometido, ¿de cuántas maneras diferentes puede obrar Luis? ¿En cuáles de ellas cumple su promesa?

## **Disyunción excluyente o Diferencia simétrica**:

Dos proposiciones cualesquiera pueden combinarse por medio de la “o” para conformar una nueva proposición que se denomina disyunción excluyente o diferencia simétrica de las proposiciones originales.

En símbolos **$p \Delta q$** que se lee “p o q pero no las dos”

Ejemplo: *Estoy en la facultad o en casa.*

**p** = estoy en la facultad **q** = estoy en casa **$p \Delta q$** = estoy en la facultad o estoy en casa.

¿Si estoy en la facultad puedo estar en casa?, ¿si estoy en casa puedo estar en la facultad? ¿Es posible cumplir la acción simultáneamente? **Analizar** el valor de verdad de **$p \Delta q$** relacionándola al cumplimiento de la acción. Confeccionar la tabla de verdad para la disyunción a partir de lo analizado.

Tabla de Verdad

| P | q | $p \Delta q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | |
| **V** | **F** | |
| **F** | **V** | |
| **F** | **F** | |

La disyunción excluyente es verdadera cuando las proposiciones originales tienen distintos los valores de verdad.

En el lenguaje coloquial la “o” no suele distinguirse como incluyente o excluyente, es común decir *“p o q o ambas”* como también *“p o q pero no ambas”*. En el lenguaje escrito para eliminar la ambigüedad se debe elegir el símbolo adecuado.

## Implicación o Condicional:

Dos proposiciones pueden combinarse por medio de ***"si ..... , entonces...."*** para conformar una nueva proposición que se denomina implicación.

En símbolos $p \Rightarrow q$ que se lee *"si p, entonces q"*

También se puede leer:

*"p implica q"* , *"p sólo si q"* , *"p es suficiente para q"* o *"q es necesario para p"*

Ejemplo: **p** = hace buen tiempo **q** = salimos a caminar

**p ⇒ q** = *si hace buen tiempo, entonces salimos a caminar*.

¿Cuáles son las posibilidades? Si llueve ¿me libero del compromiso? **Analizar** el valor de verdad de la implicación considerando el compromiso que se establece, condicionado por **p**. El valor de verdad será V cuando el compromiso se cumple.

<u>Tabla de Verdad</u>

| P | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | |
| **V** | **F** | |
| **F** | **V** | |
| **F** | **F** | |

Así, si no hace buen tiempo quedo librado del compromiso y, salgamos o no a caminar, la implicación será verdadera; ahora, si hace buen tiempo y salimos a caminar la implicación será verdadera porque se ha cumplido con el compromiso; si no salimos a caminar no cumpliríamos con el compromiso y la implicación sería falsa.

La proposición **p** se llama **antecedente** y **q** se llama **consecuente**, de la implicación.

La implicación usual en matemática es **formal** en el sentido de que no es necesario que el consecuente se derive lógicamente de antecedente; por ejemplo:

"Si apruebo matemáticas entonces llueve"

Cuando el consecuente deriva lógicamente del antecedente la implicación se llama **material** y queda incluida en la primera; por ejemplo:

"Si un triángulo es equilátero entonces es isósceles"

**9.** Darío promete lo siguiente a un compañero: "si apruebo el parcial, te presto los apuntes".

a) Identificar las proposiciones simples que componen a la proposición compuesta.
b) Escribir la proposición compuesta en lenguaje simbólico.
c) En relación con la situación, ¿cuántas posibilidades diferentes hay? ¿En cuáles de ellas Darío no cumple su promesa?

## Doble Implicación o Bicondicional:

Dos proposiciones pueden combinarse por medio de ***".... si y solo si ...."*** conformando una nueva proposición que se denomina *doble implicación*.

En símbolos $p \Leftrightarrow q$ que se lee "p si y sólo si q"

*La doble implicación puede definirse como la conjunción de una implicación y su recíproca*, es decir:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Ejemplo: El triángulo ABC es equilátero si y sólo si es equiángulo".

p = ABC es equilátero q = ABC es equiángulo

$p \Leftrightarrow q$ = un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.

**Analizar**, en relación a la situación, ¿cuántas posibilidades diferentes hay? ¿En cuáles de ellas es verdadera la proposición compuesta? Confeccionar la tabla de verdad para la doble implicación, a partir de lo analizado.

Tabla de Verdad

| P | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | |
| **V** | **F** | |
| **F** | **V** | |
| **F** | **F** | |

La doble implicación es verdadera sólo cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

## Proposiciones y Tablas de Verdad

Hemos visto que con el uso de conectivos lógicos ( $\sim$ , $\wedge$ , $\vee$ , $\Delta$ , $\Rightarrow$ , $\Leftrightarrow$ ) podemos elaborar, a partir de proposiciones simples ( p, q, r, ...), proposiciones compuestas.

También que el valor de verdad de una proposición compuesta, depende exclusivamente de los valores de verdad de las proposiciones simples.

Si consideramos, por ejemplo, la proposición : $\sim ( p \wedge \sim q )$

su tabla de verdad es:

columna ↓

| | p | q | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $\sim ( p \wedge \sim q )$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | **V** | **V** | **F** | **F** | **V** |
| fila → | **V** | **F** | **V** | **V** | **F** |
| | **F** | **V** | **F** | **F** | **V** |
| | **F** | **F** | **V** | **F** | **V** |

2 V , 2 F ↲ 1 V , 1 F↲

## Criterio para la construcción de la tabla

En las primeras columnas ubicamos las proposiciones simples que intervienen.

El número de filas debe ser tal que permita todas las posibles combinaciones de V y F para estas proposiciones (para 2, como en este caso, se necesitan 4 filas; para 3 variables se necesitan 8 filas; y, en general, para **n** variables se necesitan $\mathbf{2^n}$ líneas).

Para colocar ordenadamente todos los casos, en la primera columna pondremos la mitad de todos los casos posibles con V, y la otra con F, y en la segunda pondremos, alternativamente, V y F, en grupos mitad de la longitud de los grupos anteriores, y así sucesivamente.

**<u>Observación:</u>** Se presenta aquí otro criterio para la construcción de la tabla.

| $\sim ( p \wedge \sim q )$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sim$ | p | $\wedge$ | $\sim$ | q |
| **V** | **V** | F | F | **V** |
| **F** | **V** | V | V | **F** |
| **V** | **F** | F | F | **V** |
| **V** | **F** | F | V | **F** |

**10.** **Construir** la tabla de verdad de $( p \Rightarrow \sim q ) \vee r$.

## CONJUNTOS NUMÉRICOS

### Noción de Conjunto:

La teoría intuitiva de conjunto, sin entrar en el detalle de una teoría axiomática de conjuntos, se trata de una teoría en el sentido de un razonamiento matemático válido, en la que se utilizan signos lógicos, las reglas proposicionales y de equivalencias lógicas; y también dos signos fundamentales y específicos de la teoría de conjuntos: " = " y "$\in$", las que se estudiarán más adelante.

Así, intuitivamente, un conjunto se piensa como una lista, colección o clase de objetos bien definidos. Los objetos pueden ser cualquiera: números, personas, letras, ríos, etc. Estos objetos se llaman *elementos* o *miembros* del conjunto.

> *Un conjunto está determinado cuando se sabe qué objetos lo constituyen; cuáles son sus elementos.*

### Notación

Se adopta la convención de denotar los conjuntos por letras mayúsculas

A , B , X , Y , ......

y a sus elementos por letras minúsculas: a , b , x , y , .....

## Definición por Extensión y por Comprensión

Si se define un conjunto enumerando sus elementos, por ejemplo, el conjunto A de los números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; se escribe separando los elementos por comas, y encerrándolos entre llaves:

$$A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Esta forma de representación es la llamada <u>definición por extensión</u> de un conjunto.

Si se define al conjunto enunciando la propiedad que deben cumplir sus elementos, por ejemplo, el conjunto B de las vocales, entonces se emplea una letra, por lo general *x*, para representar un elemento cualquiera, y se escribe:

$$B = \{ x / x \text{ es vocal}\}$$

se lee: "B es el conjunto de letras x tal que x es vocal"

Esta forma de representación es la llamada <u>definición por comprensión</u> de un conjunto.

Entonces, un conjunto puede determinarse de dos formas:

**Por extensión**: *un conjunto se determina por extensión cuando se enumeran todos los elementos de dicho conjunto*. B = {a, e, i, o, u }

**Por comprensión**: *un conjunto se determina por comprensión cuando se especifica alguna propiedad común a todos los elementos del conjunto*. A = { x / x es número natural y x > 10 }

**11. Indicar** si los conjuntos que se citan a continuación están definidos por extensión o por comprensión:

a) $A = \{ 1, 3 , 5, 7 \}$

b) $D = \{ x / x = 5^n \ , n \in R \}$

c) $F = \{ a , e , i , o , u \}$

d) H = { miércoles }

e) $K = \{ x / x \in R \ \wedge \ 1 + x^2 = 0 \}$

**12. Expresar** los siguientes conjuntos por extensión o por comprensión según corresponda:

a) G = { x / x : numero natural de un dígito }

b) P = { a , e , o }

c) E = { x / x : múltiplo natural de 2, menor a 10 }

d) B = { 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }

e) Q = { - 1 , 1 }

f) T = { x / x $\in$ Z $\wedge$ -5 < x < 0 }

g) S = { - 3 , 0 , 3 , 6 , 9 , ... }

h) K = { x / x $\in$ Z $\wedge$ 1/5 < x < 4/5 }

**Uso de Cuantificadores para expresar conjuntos**: Se utilizan para abreviar la escritura.

**Cuantificador universal** ( $\forall$ ) , que significa *para todo* (*cualquiera* ).

Así $\forall$ x $\in$ A, se lee "*para todo x perteneciente a A*".

**Cuantificador existencial** ( $\exists$ ), que significa *existe al menos un* .....

Así, $\exists$ x $\in$ A , se lee "*existe al menos un x perteneciente a A*"

# Pertenencia

Si un objeto $x$ es elemento de un conjunto A, se escribe: $\boldsymbol{x \in A}$

que se lee: " $x$ pertenece a A " o " $x$ está en A "

Si $x$ no es elemento de un conjunto A, se escribe: $\boldsymbol{x \notin A}$

que se lee: " $x$ no pertenece a A " o " $x$ no está en A "

# Conjunto Finito e Infinito

Un conjunto es finito si al contar los diferentes elementos del conjunto el proceso de contar tiene fin. Si no, el conjunto es infinito.

Ejemplo:

a)A = { x / x $\in$N, 1< x < 5 }

A = { 2, 3, 4 } A es un conjunto FINITO

b)B = { x / x $\in$ R , 1< x < 5 } B es un conjunto INFINITO

*Recordemos que es usual representar con **N** al conjunto de los naturales, con **Z** al conjunto de los enteros, con **Q** al de los racionales, con **R** al conjunto de los reales y con **C** al de los complejos.*

## CONJUNTOS ESPECIALES

En la aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de un conjunto que se estén estudiando generalmente pertenecen a algún conjunto mayor fijo llamado **Conjunto Universal** o **Referencial**. Por ejemplo en Geometría del plano, el conjunto universal consta de todos los puntos en el plano y en $A = \{ x / x \in Z \wedge x^2 = 1\}$ el referencial puede ser Z (o cualquier conjunto numérico que lo contenga).

## Conjunto Vacío

*Conjunto vacío, es el que carece de elementos. Denotaremos con " $\phi$ ", y simbólicamente* $\phi = \{ x / x \neq x \}$ *o* $\phi = \{ \}$

Por ejemplo: $S = \{x / x$ es un entero positivo y $x^2 = 3 \}$ no tiene elementos ya que ningún entero positivo tiene la propiedad requerida.

Entonces una propiedad o función proposicional, que se convierte en proposición falsa para todos los elementos del universal, caracteriza por comprensión un conjunto vacío.

## Conjunto Unitario:

Si solo un elemento del referencial **U** cumple la propiedad P, el conjunto se dice unitario.

*Se define así al conjunto que está formado por un único elemento*

*simbólicamente* $A = \{ a \} = \{ x / x = a \}$

**13.** ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son: vacíos, unitarios finitos e infinitos? señalar, en cada caso, un referencial.

a) B = { x / x.2 = 4 }

b) A = { x / $x^2 < 0$ }

c) R = { x / x $\in$ R}

d) C = { x / x es solución de 3 - x = 5 }

e) D es el conjunto de elementos de un átomo.

f) E = {0 }

g) F es el conjunto de las estrellas

h) M = { x / x.2 = 4 , x es impar }

## Conjunto de los Números NATURALES

Al conjunto de los números naturales lo designamos con **N**:

$\mathbf{N_0}$= {0, 1, 2, 3, 4,5,…}

Las propiedades **N** son:

- ✓ Es **infinito** (∞).
- ✓ Tiene primer elemento: cero. No tiene último elemento.
- ✓ Todo número natural tiene un **sucesor.** Un número natural y su sucesor se dicen **consecutivos**.
- ✓ Todo número (excepto cero) tiene un **antecesor**.
- ✓ El sucesor **c** de un número natural **b** es mayor que él y su antecesor **a** es menor. Simbólicamente: **a < b < c**
- ✓ Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales. Por eso se dice que es un conjunto discreto.

## Conjunto de los Números ENTEROS

Al conjunto de los números enteros lo designamos con **Z**

**Z** = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...}

Las propiedades **Z** son:

- ✓ Es infinito (∞).
- ✓ No tiene primero ni último elemento.
- ✓ Todo número entero tiene un sucesor. Un número entero y su sucesor se dicen consecutivos.

- ✓ Todo número entero tiene un antecesor.
- ✓ El sucesor **c** de un número natural **b** es mayor que él y su antecesor **a** es menor. Simbólicamente: **a** < **b** < **c**
- ✓ Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros. Por eso, el conjunto de números enteros es discreto.

## Conjunto de los Números RACIONALES

Todo número que puede ser expresado mediante una fracción es un **número racional**. A este conjunto de números los designamos con la letra **Q**. Se llama **fracción** a un cociente de números enteros, $\frac{a}{b}$, donde b es distinto de 0.

- ➢ Todo **número entero** se puede expresar como una **fracción** con denominador 1.
  - *Ejemplos*: $3 = \frac{3}{1}$; $-4 = \frac{-4}{1}$
- ➢ Todo **número racional** se puede expresar como **número decimal exacto** o **periódico**.

  *Ejemplos*: $0{,}4 = \frac{4}{10}$; $\frac{1}{3}$= 0,333333333…. = $0{,}\widehat{3}$

> *La unión del conjunto **Z** de números enteros y el conjunto de números fraccionarios que no representan números enteros es el conjunto **Q** de los **números racionales**.*

Las propiedades **Q** son.

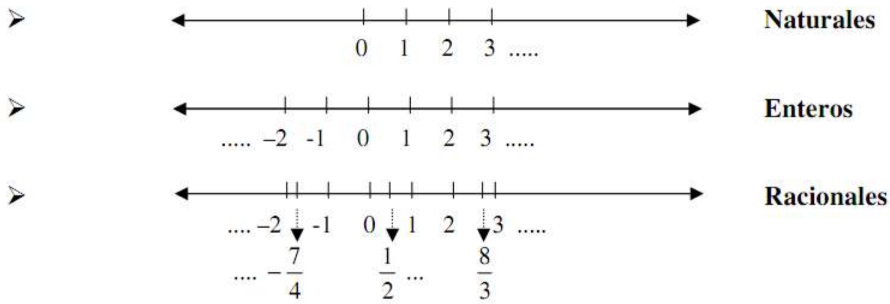
- ✓ Es **infinito** (∞).
- ✓ No tiene primero ni último elemento.
- ✓ Entre dos números racionales existen infinitos racionales. Por ello, se dice que el conjunto de números racionales es **denso**.
- ✓ Como consecuencia de la propiedad anterior, ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.
- ✓ Q es un conjunto ordenado por la relación menor o igual. Si los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fraccionarios irreducibles, se cumple que:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > cb$$

- ✓ Dos fracciones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, que cumplen la condición $ad = cb$ son equivalentes Esto significa que expresan el mismo número racional

## Representación de los Números en la Recta

La representación numérica de los conjuntos vistos hasta aquí:




**Analizar y responder**.

1. En el conjunto de los números enteros:
   a) ¿ 0 es el menor de los enteros positivos?
   b) ¿ 0 es el menor de los enteros no negativos?
   c) ¿Cada número tiene su opuesto?
   d) ¿Qué se obtiene de sumar un número con su opuesto?
   e) Definir diferencia entre dos números enteros.

2. En el conjunto de los números racionales:
   a) ¿ 1 es el menor de los racionales positivos?
   b) ¿ 0 es el mayor de los racionales que no son positivos?
   c) ¿Cada número tiene su inverso?
   d) ¿Qué se obtiene de multiplicar un número con su inverso?
   e) Definir la división.

## Conjunto de los Números REALES

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en el campo de los números racionales. La solución a esta ecuación requiere la descripción de los **números irracionales**.

Los números irracionales no se pueden expresar como una fracción o como un cociente de dos enteros, son aquellos cuya expresión decimal es infinita y no tiene un período, por ejemplo:

- ➢ El número pi: $\pi$

- La raíces de índice par de números naturales cuyos resultados no son naturales. *Ejemplo*: $\sqrt{2};\sqrt{6};\sqrt[4]{8}$ ; etc.
- Las raíces de índice impar de números enteros cuyos resultados no son enteros. *Ejemplo*: $\sqrt[3]{7};\sqrt[5]{-2}$ ; etc.

| |
|---|
| *La unión del conjunto **Q** de números **racionales** y el conjunto de números **irracionales** es el conjunto **R** de los números **reales**.* |

Las propiedades **R** son.

- ✓ Es infinito (**∞)**.
- ✓ No tiene primero ni último elemento.
- ✓ Entre dos números reales existe siempre un número infinito de reales. Se dice que el conjunto de números reales es **denso**.
- ✓ Ningún número real tiene sucesor ni antecesor.
- ✓ El conjunto **R** es un conjunto totalmente ordenado por la relación menor o igual.
- ✓ Es un conjunto **continuo**.

## Conjunto de los Números COMPLEJOS

La ecuación $x^2 = -9$ no tiene solución en **R** porque los cuadrados de números reales nunca son negativos. Para resolver esta ecuación, se crea el Conjunto de *números complejos* **C**, que incluye tanto a R como a números que son soluciones de ecuaciones sin resultado en R.

| |
|---|
| ***Número complejo** es todo par ordenado de números reales.*<br>***C** = {(a, b) / a ∈**R** ∧ b ∈**R**}. La notación usual es z = (a, b) donde a (primera componente) se denomina parte real de z y b (segunda componente) se denomina parte imaginaria. Un número complejo también se puede expresar en forma binómica: **z** = **a** + **bi**.*<br>*Al número i se llama **unidad imaginaria** que cumple: $\boldsymbol{i^2 = -1}$* |

## Inclusión entre Conjuntos

Si cada elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un **subconjunto** de B. También decimos que A está **incluido** o contenido en B, o que B incluye o contiene a A. Estas relaciones se denotan:

$A \subset B$ que se lee "A está incluido en B"

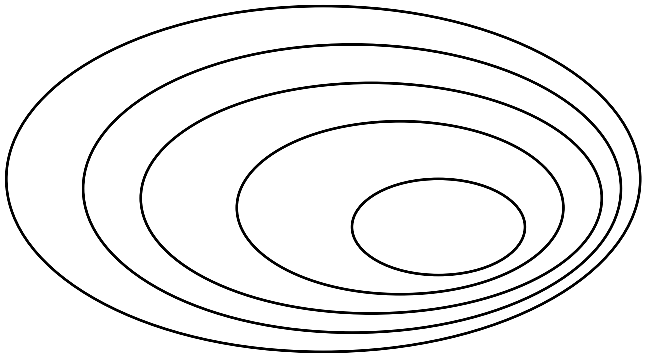
y

$B \supset A$ que se lee " B incluye a A"

| Definición: $A \subset B \iff \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ |
|---|

Ejemplo:

Los conjuntos numéricos se relacionan por medio de la inclusión de la siguiente manera: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. *Aquellos conjuntos en los que uno de ellos está incluido en otro, y éste a su vez, en otro, y así sucesivamente reciben el nombre de* **Conjuntos Anidados.**



# Propiedades de la Inclusión de Conjuntos

| | | |
|---|---|---|
| I. | $\forall A, \ \phi \subset A \subset U$ | |
| II. | $\forall A$, se tiene $A \subset A$ | **Propiedad Reflexiva** |
| III. | $\forall A, B, C$, si $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ | **Propiedad Transitiva** |
| IV. | $A, B$, si $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$ | **Propiedad Antisimétrica** |

**14. Considerar** los siguientes conjuntos. Luego, completar con el símbolo correcto $\subset$ o $\not\subset$ entre cada pareja de conjuntos:

$\phi$ , **A** = { 1 } , **B** = { 1 , 3 } , **C** = { 1 , 5 ,9 } , **D** = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 } , **E** = { 1 , 3 , 5 , 7 , 9 } **U** = { 1 , 2 , ... , 8 , 9 }

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\phi$ …... A | A …... B | B …... C | B ….. E | C …... D |
| C …... E | E …... B | D …... U | A …….. A | A …….. E |

**15. Escribir** $\in$ ó $\notin$

a) $\sqrt{3}\ \ldots\ldots\ldots I$ b) $\sqrt[4]{81}\ \ldots\ldots I$ c) $\sqrt[3]{2}\ \ldots\ldots I$

d) $\sqrt[3]{-8}\ \ldots\ldots\ldots I$ e) $1+\ \sqrt{2}\ \ldots\ldots I$ f) 0,02…….Q

g) $\sqrt{5}+2\ \ldots\ldots Q$ h) $\frac{8}{16}\ \ldots\ldots\ldots Z$

# Igualdad entre Conjuntos

Un conjunto A es igual a un conjunto B si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento de A pertenece a B y, además, cada elemento de B pertenece a A.

| Simbólicamente: **A = B** $\Leftrightarrow$ **A** $\in$ **B** $\wedge$ **B** $\in$ **A** |
|---|

Sea A = { 1 , -1 } y B = { x/ x $\in$ Z $\wedge$ $x^2$ -1 = 0 }

A y B conjuntos son conjuntos iguales, A=B

# Conjuntos disjuntos

Si dos conjuntos A y B *no tienen ni un elemento común*, es decir, ningún elemento de A está en B y ningún elemento de B está en A, se dice que A y B son **disjuntos**.

Ejemplos:

a) Sea A = { 1 , 3 , 5 } y B = { 3 , 4 , 5 , 6 }

A y B no son disjuntos, pues 3 y 5 son comunes a ambos conjuntos.

b) Sea C = { a , e , o } y D = { i , u }

C y D son disjuntos, pues ningún elemento de D pertenece a C y viceversa.

## Unión de Conjuntos: $A \cup B$

*La unión de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B. La "o" tiene sentido incluyente.*

| |
|---|
| Simbólicamente: $A \cup B = \{ x \in \mathbf{U} \,/\, x \in A \lor x \in B \}$ |
| o bien, $A \cup B = \{ x \,/\, x \in A \lor x \in B \}$ |

Ejemplos:

a) Si $A = \{ 1, 3, 5 \}$ y $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ $\Rightarrow$ $A \cup B = \{ 1, 3, 4, 5, 6 \}$

b) Si $C = \{ a, e, o \}$ y $D = \{ i, u \}$ $\Rightarrow$ $C \cup D = \{ a, e, i, o, u \}$

c) Si $T = \{ x \,/ 2.x = 4 \}$ y $K = \{ 2, 4, 6, \}$ $\Rightarrow$ $T \cup K = \{ 2, 4, 6 \}$

## Intersección de Conjuntos: $A \cap B$

*La intersección de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B.*

| |
|---|
| Simbólicamente: $A \cap B = \{ x \in \boldsymbol{U} \,/\, x \in A \land x \in B \}$ |
| o bien, $A \cap B = \{ x \,/\, x \in A \land x \in B \}$ |

Ejemplos:

a) Si $A = \{ 1, 3, 5 \}$ y $B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \{ 3, 5, \}$

b) Si $C = \{ a, e, o \}$ y $D = \{ i, u \}$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \{ \} = \phi$

c) Si $T = \{ x \,/ 2.x = 4 \}$ y $K = \{ 2, 4, 6, \}$ $\Rightarrow$ $T \cap K = \{ 2 \}$

**Analizar y responder** teniendo en cuenta las definiciones. Puedes ayudarte con diagramas.

A partir de los conjuntos que a continuación se detallan, hallar las operaciones sabiendo que:

**A** = { 1 , 2 , 3, 5 } **B** = { 1 , 2 , 4 , 7 , 8 } **C** = { 2 , 3, 4, 6 , 8 }

| | | |
|---|---|---|
| $A \cup C$ | $A \cap B$ | $A \cap C$ |
| $B \cup C$ | $B \cap C$ | $A \cap B \cap C$ |

## Complemento de un Conjunto: $A^c$

*Llamamos* ***complementario*** *de un conjunto A respecto de un universal U, al conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A.*

*en símbolo:* $\boldsymbol{A^c} = \{ x / x \in U \;\; y \;\; x \notin A \}$

**Analizar y responder** teniendo en cuenta definición. Puedes valerte de diagramas.

Sean:

$U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, $B = \{ 1, , 3, 4 \}$ y $C = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

Hallar : $B^c$ y $C^c$

$U = N$ y $X = \{ x / x \in N \;\; \wedge \;\; x \text{ es par} \}$ . Hallar $X^c$

$U = Z$ y $W = \{ x / x \in Z^+ \}$ Hallar $W^c$

$U = R$ y $F = \{ x / x \in R \;\; \wedge \;\; x \leq 5 \}$ Hallar y graficar en la recta real a $F^c$

$U = R$ y $K = \{ x / x \in R \;\; \wedge \;\; -5 \leq x \leq 5 \}$ Hallar y graficar en la recta real $K^c$

## Diferencia de Conjuntos: ( A - B )

*Llamamos* ***diferencia de dos conjuntos*** *A y B al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.*

En símbolo: $\mathbf{A - B} = \{ x / \;\; x \in A \;\; y \;\; x \notin B \}$

## Diferencia Simétrica: (A Δ B)

Se llama **diferencia simétrica** entre dos conjuntos A y B *al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B y los elementos de B que no pertenecen a A*, es decir *aquellos elementos que pertenecen exclusivamente a uno de los conjuntos.*

En símbolos: $\mathbf{A \Delta B} = \{x / x \in A \;\; \Delta \;\; x \in B\}$

**16. Determinar** el valor de verdad de las afirmaciones siguientes teniendo en cuenta la definición y propiedades de los conjuntos:

a) 0 es el mayor de los enteros negativos.
b) 1 es el menor de los racionales positivos.
c) 0 es el menor de los enteros no negativos.
d) 0 es el mayor de los racionales que no son positivos.
e) Entre 5 y 6 no hay números enteros.
f) Existe un número racional entre los enteros 5 y 6.
g) Entre 5 y 6, existen infinitos racionales.
h) Cada número racional tienen su inverso y el inverso es único.
i) Cada número entero tiene su opuesto y el opuesto es único.
j) Algunos enteros tienen inverso.
k) El cero es el único número que coincide con su opuesto.
l) El uno es el único número que coincide con su inverso.
m) La propiedad de la existencia de inverso permite definir la división en Q.
n) La división por cero no queda definida.

**17. Completar** las siguientes definiciones.

<u>Suma:</u>

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$ siendo a, b, c y d enteros, $b \neq 0$ y $d \neq 0$

<u>Producto:</u>

$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..}$ siendo a, b, c y d enteros, $b \neq 0$ y $d \neq 0$

**18. Determinar** cuáles de las siguientes igualdades son proposiciones verdaderas:

a) $\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3}$ b) $\frac{5+(-8)}{3} = \frac{5}{3} - \frac{8}{3}$ c) $4 * \frac{7}{3} = \frac{4*7}{4*3}$

d) $\frac{2+3}{3} = 2$ e) $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$ f) $\frac{a}{a+b} = 1 + \frac{a}{b}$

# ACTIVIDADES PROPUESTAS

## *Para seguir avanzando!*

**Actividad 1**: Determinar si los siguientes enunciados son proposiciones, en el caso de serlo, indicar el valor de verdad de cada una de ellas (a y b representan números reales cualesquiera).

a) Todo número par es divisible por 2.
b) 24 - 8 =15
c) Todos los perros son animales.
d) Todos los animales son perros.
e) Los triángulos equiláteros no tienen tres lados congruentes.
f) 2x – 3 = 0
g) Si 3 < 5 entonces -3 < -5
h) 5 + 7 – 8
i) 6 + 4 = 10 y $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$

**Actividad 2**: Indicar si las siguientes expresiones son funciones proposicionales o proposiciones o ninguna:

a) $x$ es par y 6 también.
b) $x$ e $y$ son impares.
c) El número cero.
d) 2 es un número par y primo.
e) $\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$

**Actividad 3**: Responder y justificar: ¿Las siguientes expresiones son proposiciones? Luego, si es posible, asignar un valor real a las variables que aparecen en ellas, de modo que resulten proposiciones verdaderas.

a) $x^2 + 4 = 8$
b) $2t + 1 \geq 5$
c) $3z + 1 = \frac{2}{3}$
d) $\sqrt{81} = y$
e) $-\sqrt{81} = x$
f) $x^3 = x.x.x$

**Actividad 4:** Las siguientes expresiones definen proposiciones porque se han utilizado cuantificadores ($\forall$ y $\exists$) para transformar las *funciones proposicionales* en *proposiciones*.

Consigna: expresarlas en forma coloquial. Determinar el valor de verdad de las mismas. Justificar.

a) $\forall\, x \in R : x^2 \geq 0$

b) $\forall\, a, b \in R:\ (a+b)^2 = a^2 + b^2$
c) $\exists\, x\ \in R\,/\ x+1=3$
d) $\exists\, x\ \in R\,/\,x^2+1=-1$
e) $\exists!\ x\ \in R\,/\ x+1=3$
f) $\forall\, x \in R\ \exists\, y \in R\ /\ x\ + y = 0$
g) $\forall\, x \in R\ \exists\, y \in R\ /\ x^2\ + y^2 = 0$

**Actividad 5**: Traducir las siguientes expresiones a la forma simbólica. Decir si son V o F. Justificar.

a) Algunos números enteros son impares.
b) Todo número natural es mayor que cero.
c) Cualquiera que sea $x$, se verifica que $x^3 = x.x.x$
d) Existe algún valor de $x$ tal que $x^2 + 4 = 8$
e) Ningún número elevado al cuadrado da resultado negativo.
f) Existe algún valor de $x$ tal que $x^2 + 1 = 0$

**Actividad 6**: En las siguientes proposiciones compuestas, identificar a las proposiciones simples que la componen y luego escribirlas en forma simbólica.

a) El producto de dos números es 0 sí y solo uno de los mismos es 0.
b) El producto de dos números es 0 entonces uno es positivo y el otro es negativo.
c) Juan y José van a pescar entonces comen pescados o pasan hambre.
d) La sustancia reacciona y se calienta entonces es peligrosa si y solo si el laboratorio no está bien ventilado.
e) Si no apruebo el primer parcial, entonces voy al recuperatorio.
f) Si no apruebo el parcial y no apruebo el recuperatorio, vuelvo el año que viene.

**Actividad 7**: Juan promete lo siguiente a un compañero: “te presto el libro o te presto los apuntes”.

a) Identificar las proposiciones simples que componen a la proposición compuesta.
b) Escribir la proposición compuesta en lenguaje simbólico.
c) En relación a lo prometido, ¿de cuántas maneras diferentes puede obrar Juan? ¿En cuáles de ellas cumple su promesa?
d) Confeccionar la tabla de verdad para la disyunción a partir de lo analizado.

**Actividad 8**: Juan promete lo siguiente a un compañero: “si consigo el libro, te presto los apuntes”.

a) Identificar las proposiciones simples que componen a la proposición compuesta.
b) Escribir la proposición compuesta en lenguaje simbólico.
c) En relación a la situación, ¿cuántas posibilidades diferentes hay? ¿En cuáles de ellas Juan no cumple su promesa?
d) Confeccionar la tabla de verdad para la implicación a partir de lo analizado.

**Actividad 9**: Sea la siguiente regla en un laboratorio: “si la botella contiene ácido entonces tiene etiqueta”.

a) Identificar las proposiciones simples que componen a la proposición compuesta.
b) Escribir la proposición compuesta en lenguaje simbólico.
c) En relación a la situación, ¿cuántas posibilidades diferentes hay? ¿En cuáles de ellas no se cumple la regla?
d) Confeccionar la tabla de verdad para la implicación, a partir de lo analizado.

**Actividad 10**: "El producto de dos números es cero si y solo sí uno de los números es cero".

a) Identificar las proposiciones simples que componen.
a) Escribir la proposición compuesta en lenguaje simbólico.
b) En relación a la situación, ¿cuántas posibilidades diferentes hay? ¿En cuáles de ellas es verdadera la proposición compuesta?

**Actividad 11**: Elaborar tablas de verdad para verificar que las siguientes proposiciones son tautologías. *Tautología: proposición compuesta cuyo valor de verdad es verdadero independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la conforman.*

a) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
c) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

**Actividad 12**: Determinar, en cada caso, si la información que se da es suficiente para conocer el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas. Justificar.

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ ; r es V
b) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$; q es V
c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ ; p es V y r es F
d) $p \wedge (q \Rightarrow r)$ ; $p \Rightarrow r$ es V

**Actividad 13**: Sabiendo que la proposición $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow [s \vee (q \wedge t)]$ es falsa, establecer los posibles valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

**Actividad 14**: Colocar sobre la línea de puntos el símbolo $\Rightarrow$ o $\not\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ según corresponda (a y b son números reales):

a) $a < b$ ....... $a \neq b$
b) $a \neq b$ .......$a < b$
c) $a = b$ .......$a \leq b$
d) $a \neq 0$ ........... $a^2 > 0$
e) *a* es un número no negativo ......... *a* es positivo.
f) *a* es un número no negativo ......... *a* es positivo o nulo.
g) $a\,b > 0$ ......... $a > 0$ y $b > 0$
h) $a\,b > 0$ y $b > 0$ ........ $a > 0$

**Actividad 15**: Expresar en forma simbólica utilizando de ser necesario el cuantificador apropiado, y luego negar proposiciones. Determinar el valor de verdad en cada caso:

a) Existen enteros tales que $x^2 - 1 = 0$.
b) -5 es un número racional.
c) Los opuestos de los números naturales son menores que cero.
d) Todos los enteros son reales.

**Actividad 16**: Siendo A = {1, 2, 3, 4, 5} Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Negar las proposiciones dadas:

a) $\exists x \in A / \ x + 3 = 10$
b) $\forall x \in A: \ x + 3 < 10$
c) $\exists x \in A / \ x + 3 < 5$
d) $\forall x \in A: x + 3 \leq 7$
e) ¿De qué otra manera se puede expresar el conjunto **A**?

**Actividad 17**: Dados los conjuntos que a continuación se detallan, hallar y graficar las operaciones indicadas. **U** = $\{ x / x \in N \wedge x \leq 10 \}$

| | | |
|---|---|---|
| $A = \{ 1, 2, 3 \}$ | $B = \{ 1, 2, 3, 4, 7, 8 \}$ | $C = \{ 5, 6, 7, 8 \}$ |
| $A^c \cup C$ | $B \cup C^c$ | $A \cap C^c$ |
| $( A \cup B )^c \cap C$ | $( A \cap B ) \cup C^c$ | $( A \cup B ) \cap C^c$ |

**Actividad 18**: Siendo **U** = $\{ x / x \in Z \wedge -2 \leq x \leq 12 \}$ **C** = $\{ -2, 2, 3, 5, 6 \}$

**A** = $\{ x / x \in Z \wedge -2 \leq x \leq 4 \}$ **B** = $\{ x / x \in$ N pares $\wedge \ x \leq 8 \}$, hallar:

| | | |
|---|---|---|
| i) $A - B$ | iv) $A \cup B$ | vii) $A \Delta C$ |
| ii) $B - A$ | v) $B \cap A$ | viii) $( A \Delta B ) - C$ |
| iii) $C \Delta A$ | vi) $C - A$ | ix) $A \Delta ( B \Delta C )$ |

**Actividad 19**: Siendo $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

$B = \{ 0, 3, 4, 6, 8 \}$ y $C = \{ 1, 3, 4, 8, 9 \}$. Hallar y graficar:

| | | |
|---|---|---|
| $( A \cap B )'$ | $( A \cup C )'$ | $C' \cap A$ |
| $( A \cup B ) - C$ | $( B \cap C ) - A$ | $(A - B ) - C$ |
| $C - ( A \Delta B )$ | $( A \Delta B ) \Delta C$ | $( B \Delta C ) - B$ |

**Bibliografía:**


Falco, A. (2004). *Matemática Preuniversitaria*. Universidad Nacional de Córdoba.

Montaldo, R.; Casetti, L.; Welti, M. (2000). *Matemática básica para ingresar a la Universidad*. Universidad Nacional de Cuyo. Argentina

Novelli, A. (1997) *Elementos de Matemática*. Universidad Nacional de Luján. Bs As. Argentina.

Rabuffetti, H. *Calculo I*. X Edición. 3° Impresión. Editorial El Ateneo

Rojo, A. (1996) Algebra I. El Ateneo. Buenos Aires. Arg.

# UNIDAD 2. NÚMEROS REALES

## EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

En esta unidad estudiaremos el ***conjunto de los números reales, sus propiedades y las operaciones en R*** puesto que resultan esenciales para el estudio del cálculo infinitesimal que nos ocupará en Análisis I. La unión del conjunto **Q** de números **racionales** y el conjunto de números **irracionales** es el conjunto **R** de los números **reales**. Este conjunto puede representarse mediante una recta, llamada **recta real**. Cada punto de esta recta representa un número real, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta.

## PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LOS NÚMEROS REALES

En el conjunto de los números reales (**R**) se definen dos *operaciones internas*: la suma y el producto. Sean a, b, c números reales, la suma y el producto de reales tiene resultado único y es otro número real. Se verifican las siguientes propiedades:

***1. Propiedad conmutativa de la suma y del producto***

(∀a, b ∈ **R**) $\boldsymbol{S_1}: a + b = b + a$ $\boldsymbol{P_1}: a.b = b.a$

***2. Propiedad asociativa de la suma y del producto***

(∀a, b, c ∈ **R**) $\boldsymbol{S_2}: (a + b) + c = a + (b + c)$ $\boldsymbol{P_2}: (a.b).c = a.(b.c)$

***3. Existencia del elemento neutro para la suma y el producto***

$\boldsymbol{S_3}$: ∃!0∈**R**, ∀a∈**R** : $a + 0 = 0 + a = a$

*Existe el real 0, llamado elemento neutro para la suma, tal que otro número, operado con él a través de la operación suma, da como resultado al mismo número.*

$\boldsymbol{P_3}$: ∃!1∈**R**, ∀a∈**R** : $a.1 = 1.a = a$

*Existe el real 1, llamado elemento neutro para el producto, tal que otro número, operado con él a través de la operación producto, da como resultado al mismo número.*

***4. Existencia del elemento opuesto para la suma y del elemento inverso para el producto***

$\boldsymbol{S_4}$: Cualquiera sea **a** existe su opuesto. ∀a∈**R**, ∃(-a)∈**R** tal que: $a+(-a)=0$

<u>Nota</u>: la suma de un número real "a" con el opuesto de otro número real "b", se denota: **a + (-b) = a – b** , y se llama *diferencia entre "a" y "b".*

$\boldsymbol{P}_4$: Cualquiera sea $a \neq 0$ , existe su inverso $a^{-1}$ . ∀a∈**R***, ∃($a^{-1}$ )∈**R**

tal que: $aa^{-1}=1$ ($\boldsymbol{a^{-1}} = \frac{1}{a}$ es inverso de $\boldsymbol{a}$ )

<u>Nota</u>: a ∈ **R*** significa que a ≠ 0, es decir **R*** = **R** – {0}, por otra parte, como $\boldsymbol{a^{-1}} = \frac{1}{a}$ , cuando multiplicamos a ∈ **R** por el inverso de otro b ∈ **R***, lo denotaremos $\boldsymbol{ab^{-1}} = \frac{a}{b}$ , que llamamos cociente. O sea, no se puede dividir por 0.

***5. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma***

**SP**: $a(b+c)=ab+ac$

De las propiedades enunciadas se desprenden otras, a continuación se listan algunas. **Estudiar** las propiedades algebraicas de R:

| | |
|---|---|
| a) $\forall a \in R,\ a0 = 0$ | i) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ |
| b) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$ | j) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2$ |
| c) $-(-a) = a$ | k) $(-a)^2 = a^2$ |
| d ) $-a = (-1)a$ | l) $(-a)^n = a^n \ si\ n\ es\ par$ |
| e) $a - (-b) = a + b$ | m) $(-a)^n = -a^n \ si\ n\ es\ impar$ |
| f) $(-a)(-b) = ab$ | n) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \ si\ a \neq 0, b \neq 0$ |
| g) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | o) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \ si\ a \neq 0, b \neq 0$ |
| h) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | p) $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ si\ b \neq 0$ |

**1. Responder** las siguientes cuestiones.

- ✓ Considerando la suma y el producto en **Q**, ¿se verifican también todas estas propiedades?
- ✓ ¿Qué propiedades se verifican en **N**? y en **Z**?
- ✓ En Z no se verifica $P_4$, pues no todo entero tiene inverso. Pero, ¿existe algún entero que tenga como inverso también un entero?
- ✓ En N no se verifica $P_4$ ni $S_4$; ¿ningún natural tiene inverso?, ¿ningún natural tiene opuesto?

**2. Determinar** cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuales falsas. Justificar la respuesta con procedimientos matemáticos adecuados o enunciar propiedades.

a) $(52^3 + 973^4)(2^2 - 4) = 0$ b) $\frac{0}{5} = 0$ c) $-5 - (-2) = -3$

d $(5+2)(5-2) = 5^2 - 2^2$ e) $(-4)(-2) = 4.2$ f) $(3+4)^2 = 3^2 + 4^2$

g) $(3 - 4)^2 = 9 - 2.3.4 + 16$ h) $(5+4)^{-1} = 5^{-1} + 4^{-1}$ i) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$

j) $(5.4)^{-1} = 5^{-1}.\, 4^{-1}$ k) $(-3)^2 = 9$ l) $-3^2 = -9$

Repaso. **Analizar** las definiciones de potencia dadas a continuación:

**a) Potencia con exponente natural**

Sea **a** un número real, **a**$\in$ **R** , y *n* un número natural (**n**$\in$ **N**)

$$\begin{Bmatrix} a^1 = a \\ a^n = aa \ldots a \; (n - factores) \; con \; n = 2,3,4 \ldots \end{Bmatrix}$$

**b) Potencia con exponente entero**

Sea **a** un número real (**a**$\in$ **R**), a$\neq 0$

$$\begin{Bmatrix} a^0 = 1 \\ a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n \; con \; n = 1,2,3, \ldots \end{Bmatrix}$$

**3. Escribir** cada expresión de manera que todos los exponentes sean positivos usando las propiedades anteriores:

a) $\frac{x^5 y^{-2}}{x^3 . y}$, $x \neq 0, y \neq 0$ b) $\left(\frac{x^{-3}}{3y^{-1}}\right)^2$, $x \neq 0, y \neq 0$

**4.** Siendo **a** un número real (**a**∈ **R**) y **n** un número natural (**n**∈ **R** ), **completar** en el siguiente cuadro con: *positivo*, *negativo* o nulo. **Escribir** un ejemplo numérico.

| BASE (a) | EXPONENTE (n) | POTENCIA ($a^n$) |
|---|---|---|
| Positiva | par | |
| Positiva | impar | |
| Negativa | par | |
| Negativa | impar | |
| Nula | par | |
| Nula | impar | |

**5. Completar** el siguiente cuadro que muestra las propiedades de las potencias de números reales. Sean ***a*** y ***b*** números reales (**a**∈ **R** ∧ **b**∈ **R**) , ***m*** y ***n*** números enteros (***m, n*** ∈ **Z**).

1) $a^m a^n$=……

2) $\frac{a^m}{a^n} = \cdots \quad si\ a \neq 0$

3) $(a.b)^n = \ldots$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \cdots \quad si\ b \neq 0$

5) $(a^m)^n$ = …

**6. Ejercitar** cálculo mental ☺ y propiedades. Resolver las siguientes operaciones sin utilizar calculadora.

a) $\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) =$

b) $-\frac{26}{25}\,\frac{15}{39}\left(-\frac{35}{7}\right) =$

c) $\frac{4}{9}\left(-\frac{6}{8}\right) =$

d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$

e) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 =$

f) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

h) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} =$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

j) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} =$

k) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} =$

l) $\frac{3}{4} : \left(-\frac{1}{3}\right) =$

**7. Extraer** factor común indicado en cada una de las siguientes expresiones.

a) $(n+2)\ \ de\ (n+2)^2 - (n+2) + (n+2)^3$

b) $-\frac{a}{b}\ \ de\ \ \ \frac{a}{b^2} + 2 + \frac{b}{a} + \frac{1}{\frac{a}{b}}$

c) $x^n\ \ de\ \ x^n + x^{n+1}$

**8. Verificar** que:

a) $10^{k+2} - 99.10^k = 10^k, \qquad \forall k \in N$

b) $\frac{3.2^{-k} - 2^{-k+1}}{2^{-k}} = 1, \qquad \forall k \in N$

**9. Escribir** en notación científica y luego **resolver**:

*a)* 5000 . 0,000001 : 0,0000025

$$b)\frac{0{,}0002\,.\,1200}{80000000\,.\,0{,}0001} + \frac{8000\ :\ 5000000}{0{,}0008\,.\,0{,}002} : 8000 =$$

**10. Escribir** en notación científica las siguientes informaciones:

a) El peso de una molécula de hidrógeno es 0,0000000000000000000000348 gr.

b) La distancia entre la tierra y el sol es de 150000000 km.

c) La luz viaja a una velocidad de 300000km/s.

d) Un año luz es, aproximadamente, 9500000000000 km.

e) El espesor de un cierto vidrio es de 0,0015 m.

**11. Determinar** si el número dado es positivo, negativo o nulo; *n* es un número natural. Es esencial justificar la respuesta.

a) $(-2^3.2^{-4}.(-2)^2)^3$ b) $\frac{(-3)^{2n}(-3)^{2n-1}}{5^{2n}} - (-5)^{2n}$

## PROPIEDADES DE ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Sean a, b, c números reales (**a, b, c ∈ R**)

O $Dados\ dos\ reales\ a\ y\ b, se\ verifica\ una\ y\ sólo\ una\ de\ las\ alternati$

1 $a = b,\ a < b,\ a > b$, también se puede expresar:

∀ a ∈ **R**, exactamente una y sólo una de las tres alternativas siguientes es válida: o bien a = 0, o bien a∈ **R⁺**, o bien a∈ **R⁻**

O $Si\ a < b\ \ y\ \ b < c\ \ \ entonces\ \ a < c$

2

O $Si\ a < b\ \ entonces\ \ a + c < b + c$

3

O $Si\ a < b\ \ \ y\ \ \ \ c > 0\ \ entonces\ ac < bc$

4

**Estudiar** las propiedades de orden de R; a, b y c son números reales

a) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

b) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

c) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$

d) $\forall\ a\ \in R, a^2 \geq 0$

e) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

f) $Si\ a < b\ entonces\ a < \frac{a+b}{2} < b$

g) $a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0\ y\ ab > 0$

h) $a < 0, b < 0 \Rightarrow a + b < 0\ y\ ab > 0$

i) $a\ y\ b\ tienen\ signos\ distintos \Leftrightarrow ab < 0$

j) $a \text{ y } b \text{ tienen igual signo } \Leftrightarrow ab > 0$

k) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

l) $a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow ac > bc$

"si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, se obtiene otra desigualdad de sentido contrario."

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c, o\ bien, a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

"si se suma el mismo número en ambos lados de una desigualdad, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la dada."

$$a < b \text{ y } c < d \Rightarrow a + c < b + d \quad o \quad bien, a > b \text{ y } c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

"si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la dada."

m) $a < b \text{ y } c < d \Rightarrow ac < bd \quad o \quad bien, a > b \text{ y } c > d \Rightarrow ac > bd$

Siendo a, b, c, d números no negativos, "si se multiplican miembro a miembro dos desigualdades, entre números no negativos, del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada."

**12. Demostrar** a partir de las propiedades de orden básicas, que:

a) $Si\ a < 0\ \ entonces\ -a > 0$

b) $Si\ a < b \text{ y } c < 0,\ entonces\ ac > bc$

c) $\forall\ a \in R,\ \ a^2 \geq 0$

**Analizar** en base a qué propiedad o propiedades de orden se podría demostrar:

***"los números negativos son menores que los positivos"***. Escribir con símbolos.

**13. Colocar** el signo que corresponda: *mayor, menor o igual*:

| | | |
|---|---|---|
| a) -3 …..-4 | b) –(-5) …..5 | c) 0…..-8 |
| d) 2+x…..3+x | e)$(2+3)^2$…..$2^2+3^2$ | f) $(x+5)^2$…..$x^2+10x+25$ |
| g) $-3^3$…..-27 | h) $-3^3$…..27 | i) $-3^4$…..81 |

**14. Completar** en las líneas de punto, de modo que las afirmaciones resultantes sean verdaderas. **Justificar** la respuesta:

a). $Si\ x\ <\ 0\ y\ a\ <\ 3\ entonces\ ax \ldots 3x$

b). Si $a\ >\ 0\ entonces\ a^2 . \ldots . 0$

c). $Si\ a\ <\ 0\ entonces\ a^2 \ldots . . 0$

d). $Si\ a\ =\ 0\ entonces\ a^2 \ldots . . 0$

e). $Si \frac{a}{b} = 1\ \ entonces\ a. \ldots . b$

f). $Si \frac{a}{b} <\ 1\ y\ b >\ 0\ entonces\ a. \ldots . b$

g). $Si \frac{a}{b} >\ 1\ y\ b > o\ entonces\ a \ldots . . b.$

h). $Si\ a/b\ =\ 0\ entonces\ a. \ldots ..$

**Estudiar** el siguiente teorema:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{s}}, \qquad con\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s}\ \ números\ reales, a > 0,$$
$$b > 0, s\ número\ real\ cualquiera$$

**15.** Determinar los valores de *n*, enteros, para que sean verdaderas las siguientes igualdades. Es esencial justificar la respuesta:

a) $5^{2n}5^{2-n} = \frac{1}{125}$

c) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^{3n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = 81$

b) $-(-2)^{3n+1}(-2)^n = 32$

d) $\frac{3^{-n+3}3^{2n}}{3^{n+3}} = 1$

**Analizar** las siguientes definiciones y, luego, responder las cuestiones:

**a) Raíz cuadrada principal**

Sean a y b números reales no negativos,

$\sqrt{a} = b$ Significa $a = b^2$ ***b*** es la raíz cuadrada principal de ***a***.

- ¿Por qué la definición de raíz cuadrada se da para “a” no negativos?

**b) Raíz n-ésima de un número real**

Sea ***n* natural par** o sea n= 2, 4, 6, 8… y ***a*** y ***b*** **números reales no negativos**

$$\sqrt[n]{a} = b, \qquad significa\ a = b^n$$

Sea ***n* natural impar** o sea n= 1, 3, 5, 7, 9… y **a y b números reales**

$$\sqrt[n]{a} = b, \qquad significa\ a = b^n$$

- ¿Por qué en la definición se pide que "a" sea no negativo para "n" par? y para "n" impar?

- ¿Qué significa $\sqrt[n]{a} = b$, para n= 2, 3, 4, 5….? Antes de responder calcular:

$$\sqrt[3]{27} = \qquad \sqrt[3]{-27} = \qquad \sqrt[4]{16} = \qquad \sqrt[4]{-16} = \qquad \sqrt[3]{0} = \qquad \sqrt[6]{1} =$$

$$\sqrt[6]{-1} = \qquad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \qquad \sqrt{\frac{3}{8}} = \qquad \sqrt{3}= \qquad \sqrt[3]{3} = \qquad \sqrt{\pi} =$$

**c) <u>Potencia con exponente racional</u>**

Sea **a y un número real** $a > 0$, **m entero**, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- ¿Por qué ***"a"*** debe ser positivo?
- Según la definición anterior, ¿tiene sentido por ejemplo el número $9^{\frac{1}{-2}}$ ?

---

**Si el exponente es irracional**, las potencias se calculan mediante aproximaciones sucesivas de potencias racionales. Para calcular su valor aproximado se utiliza la calculadora.

---

Ejemplo: $2^{\sqrt{3}}$ , $\sqrt{3} = 1,73205$

Entonces, $2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$ , luego $2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$, luego, $2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74}$

Hoy día, la calculadora científica permite agilizar este procedimiento.

**16. Completar** las siguientes propiedades de las raíces de números reales. *Siendo a y b números reales, n y m números naturales*:

| | |
|---|---|
| $\sqrt[n]{a.b}$=..... | $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\dots}{\dots}, \ \ b \neq 0$ |
| $\sqrt[n]{a^m} = (\dots)^m$ | $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[\cdots]{\sqrt[\cdots]{a}}$ |

**Estudiar** los siguientes teoremas:

*Teorema 1:*

$\sqrt[n]{x^n} = x$ ∀x ∈ R, *n* impar

$\sqrt[n]{x^n} = |x|$ ∀x ∈ R, *n* par

*Teorema 2:*

$x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a}$ $\quad si\ \boldsymbol{a}\ es\ un\ \text{número}\ real\ cualquiera\ y\ \boldsymbol{n}\ impar$

**17. Resolver** las siguientes ecuaciones en R:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $x^2 = 1$ | b) $x^2 = -1$ | c) $x^3 = -64$ | d) $x^5 = 7$ |
| e) $x^2 = 1/4$ | f) $\sqrt{x} = 0$ | g) $\sqrt{x} = 1$ | h) $\sqrt[3]{x} = 1$ |
| i) $x^2 + 5 = 8$ | j) $x^2 + 12 = 7$ | k) $-x^2 + 5 = 1$ | |
| l) $x^4 - 5 = -\sqrt{2}$ | m) $x^2 = x$ | n) $x^2 = x^3$ | |

**18. Determinar** el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. En caso que sean falsas, dar un contraejemplo:

a) $\sqrt{x^2} = x, \ \ \forall x \ \in \ R$

b) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = x^2 + 1 \quad \forall x \ \in \ R$

c) $\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}$ si x>1

d) $x + 2y + \sqrt{(x-2y)^2} = 2x \quad \forall x, \forall y$

**19. Despejar** “y” de las siguientes relaciones:

a) $\sqrt{y}-\frac{x+y^{3/2}}{y}=(x.y)^2$  b) $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=y$

c) $\sqrt{1-x}=\frac{y+2}{2y-2}-1$  d) $3x-\frac{x+2y}{\sqrt{x}-4y}=1$

e) $\frac{2y+1}{y-2}=x$  f) $\frac{3-y}{2+y}=1$  g) $1-\left(\frac{2x}{x-y}\right)^{-1}=y$

**Definir** valor absoluto o módulo de un número real.

**Estudiar** las siguientes *propiedades del valor absoluto de un número real*

- $|x|\geq 0\quad \forall x\in R$
- $|x|=0\quad \Leftrightarrow x=0$
- $|x|=|-x|\quad \forall x\in R$
- $|x.y|=|x|.|y|\quad \forall x\in R, \forall y\in R$
- $|x+y|\leq |x|+|y|\quad \forall x\in R, \forall y\in R$
- $|x-y|=0\ \Leftrightarrow x=y\quad \forall x\in R, \forall y\in R$
- $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\quad \forall x\in R, \forall y\in R, \text{con } y\neq 0$
- $|x|\leq a\ \Leftrightarrow\ -a\leq x\leq a\quad \forall x\in R, \forall a>0$
- $|x|\geq a\ \Leftrightarrow\ x\geq a\ o\ x\leq -a\quad \forall x\in R, \forall a>0$
- $|x|\geq a\ se\ verifica\ \forall x\in R \text{ si } a<0$
- $|x|^2=x^2\qquad \forall x\in R$

**Estudiar** los siguientes teoremas

*Teorema 1*: Si *n* número natural

***a***∈R, ***n*** impar  $x^n < a \Leftrightarrow x < \sqrt[n]{a}$

$x^n > a \Leftrightarrow x > \sqrt[n]{a}$

***a*** real no negativo, ***n*** par $\quad x^n < a \Leftrightarrow |x| < \sqrt[n]{a}$

$$x^n > a \Leftrightarrow |x| > \sqrt[n]{a}$$

*<u>Teorema 2</u>*: Si s y t son números reales y a un número real positivo.

$s < t \Leftrightarrow a^s < a^t \quad$ si $a>1$

$s < t \Leftrightarrow a^s > a^t \quad$ si $0<a<1$

*<u>Teorema 3</u>*: Si a y b son número reales positivos.

$a < b \Leftrightarrow a^s < b^s \quad$ si s es real positivo

$a < b \Leftrightarrow a^s > b^s \quad$ si s es real negativo

**20.** Teniendo en cuenta los teoremas anteriores, **indicar** si las siguientes equivalencias son verdaderas o falsas, justificar la respuesta:

a) $x^3 > 27 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{27}$ $\qquad$ b) $x^2 < 16 \Leftrightarrow x < \sqrt{16}$

c) $x < 4 \Leftrightarrow x^{-2} < 4^{-2}$ $\qquad$ d) $2 < 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^4$

**21. Determinar** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificar las respuestas.

a) La ecuación $x^2 - 3 = 0$, tiene dos soluciones en R.

b) La suma $\sqrt{5} + 1$, tiene dos resultados posibles.

c) $\sqrt{3}$ representa dos puntos distintos en la recta numérica.

d) $\sqrt{-3}$ no representa ningún punto en la recta numérica.

e) Los números $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$ son reales y se encuentran a la misma distancia del cero.

e) $\sqrt[4]{(-7)^4}$ es un número natural.

**22. Resolver** las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 < 1$ $\qquad$ b) $x^2 > 1$ $\qquad$ c) $-9 < x^2 < 9$ $\qquad$ d) $-6 \leq x^4 < \sqrt{2}$

e) $-8< x^3<8$ f) $x^2- 4 \leq 2$ g) $|1-x|\leq 2$ h) $0 < x^2< 2$

**Definir** logaritmo de un número real.

**23.** Teniendo en cuenta la definición de logaritmo de un número real, **demostrar** que:

a) $\log_a 1 = 0$ b) $\log_a a = 1$ c) $\log_a a^x = x$ d) $a^{\log_a x} = x$

**Estudiar** las propiedades de los logaritmos de un número real:

*Siendo $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$ $y > 0$, $k \in R$*

a) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$ b) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^k = \mathrm{k} \log_a x$ d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

**24. Escribir** la expresión decimal (con 2 cifras decimales) de los siguientes números reales: (si la base no se especifica, se sobreentiende base 10.

a) $\log_2 32 =$ b) $\log_2 100 =$ c) $\log_2 1/32 =$ d) $\log_9 9 =$ e) $\log_9 3 =$

f) $\log_{1/2} 4 =$ g) $\ln e^3 + \ln \sqrt{e} =$ h) $\log 1000 + \log 100 + \log 0{,}001 =$

**Estudiar** la siguiente propiedad de los logaritmos:

*Siendo $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$* $log_a x = log_a y \Leftrightarrow x=y$

**25. Resolver** las siguientes ecuaciones en R:

a) $\log_x 1/9 = -2$ b) $\log_{\sqrt{x}} 7 = 2$ c) $\log_{1/3}(-x + 6) = -1$

d) $\log_x 8 = 1/2$ e) $\log\ x = 3log2$ f) $\log x - \log 3 = 2$

g) $(\ln x)^2 = -\sqrt{2}$ h) $\ln x = \log x$ i) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

j) $\log_2(x+1) - \log_4 x = 1$ k) $\log_9 x + \log_3 x = 14$

**26.** Colocar <, > o = según corresponda:

a) $\log 10$ …. $\log 100$ b) $\log_{1/10} 10$ …. $\log_{1/10} 100$

c) $\log\frac{1}{10}$ …. $\log\frac{1}{100}$ d) $\log_2 4$ …. $\text{Log}_4 16$ e) $\log_{1/2}\frac{1}{4}$ …. $\log_{1/2}\frac{1}{8}$

**Analizar** las siguientes *propiedades de los logaritmos*:

*Si a>1,* $\log_a x<y \Leftrightarrow x<a^y$

$\log_a x>y \Leftrightarrow x>a^y$

*Si 0<a<1,* $\log_a x<y \Leftrightarrow x>a^y$

$\log_a x>y \Leftrightarrow x<a^y$

**27. Resolver** las siguientes ecuaciones en **R**:

a) $9^x=\frac{1}{3}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=0{,}25$ c) $2^{4-x}=3$ d) $16^{x-2}=\frac{1}{4}$ e) $e^{2\ln x}=16$

**28. Resolver** las siguientes inecuaciones en **R**:

a) $\log_2 x > 3$ b) $\log_{½} x > 5$ c) $\log_{3/2} x<1$

d) $|\ln x| < 1$ e) $\log_5 x < 2$ f) $(\ln x)^2 \leq 5$

**29. Responder** las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué relación existe entre el logaritmo de un determinado número en base ***a*** y el logaritmo del mismo número en base ***1/a***?

b) ¿Qué relación existe entre $\log_{\mathbf{a}}$ ***b*** y $\log_{\mathbf{b}}$ ***a***?

## Correspondencia entre Números Reales y los Puntos de la Recta

## Distancia entre números reales

**Definir** *distancia* entre dos números reales. Luego responder:

a) ¿A qué distancia del 0 se encuentra -2?¿Es la misma que la distancia del 0 al 2?
b) ¿Es verdad que la d(x,y)=d(y,x), siendo x e y números reales? Justificar la respuesta.

30. Completar :

| | | |
|---|---|---|
| Si x>0, d(x,0)=…….. | Si x<0, d(x,0)=…….. | Si x=0, d(x,0)=…….. |

**31. Calcular y representar** gráficamente la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a) 1 y 4 c) 0 y 9 e) 0 y 0 g) ½ y 5/2

b) -1 y 3 d) 0 y -3 f) -2 y -4 h) -1 y ¾

**32.** Calcular y representar gráficamente:

|2|, |-2|, |0|, |3/4|

## Intervalos de números reales. Intervalos de una recta real

**33. Completar** las definiciones de ***intervalo*** *de extremos a y b*:

a) Sean **a** y **b reales**, definimos los siguientes **intervalos acotados**:

- Intervalo abierto con extremos a y b al conjunto.

$$(a, b) = \{x/x \in R, \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots\}$$

- Intervalo cerrado con extremos a y b al conjunto.

$$[a,b] = \{x/x \in R, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

- Intervalo semicerrado o semiabierto con extremos **a** y **b** a cada uno de los conjuntos.

$$(a,b] = \{x/x \in R \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

$$[a,b) = \{x/x \in R, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

b) Sean **a y b reales,** definimos los siguientes **intervalos no acotados**:

- Intervalo abierto con extremo abierto **a**, al conjunto

$$(a,\infty) = \{x \in R/ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

- Intervalo abierto con extremo derecho **b**, al conjunto

$$(-\infty,b) = \{x/x \in R, \dots\dots\dots\dots\dots\}$$

- Intervalo cerrado con extremos izquierdo **a**, al conjunto

$$[a,\infty) = \{x\ /x \in R, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

- Intervalo cerrado con extremo derecho **b**, al conjunto

$$(-\infty,b] = \{x/x \in R, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

$$(-\infty,\infty) = \{x/x \in R, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$$

**34. Representar** en la recta numérica los intervalos definidos en a) y b).

**35. Calcular y representar** en la recta numérica los siguientes conjuntos:

A=$\{x \in R\colon |x| = 2\}$ B=$\{x \in Z/\ -2 \le x < 3\}$ C=$\{x \in Z\ /\ |x| \le 6\}$

D=$\{x \in R\ /\ |x| \ge 6\}$ E=$\{x \in Z\ \ /\ |x-1| \le 3\}$ F= $\{x \in R/\ \ |x-1| \le 3\}$

G=$\{x \in R\ /\ |x| \le 6\}$ H=$\{x \in Z/4 < x < 5\}$ I=$\{x \in R/4 < x < 5\}$

G $\cap$ I F $\cup$ A F $\cap$ A $D^c$ D $\cap$ H I - G

**36. Completar** los puntos suspensivos. Sabiendo que **a** $\in$ **R**, la ecuación **|x|=a**:

a) tiene la única solución x=0, si a…..

b) no tiene solución si a….

c) tiene exactamente dos soluciones $x_1$=…, $x_2$=…. Si a….

## Entorno de un punto de la recta real.

| |
|---|
| *Un entorno centrado en un punto de la recta real* ***x*** *y de radio* ***r > 0*** *es el conjunto de todos los puntos que se encuentran a una distancia estrictamente menor de dicho punto que el valor del radio.* <br> $E(x, r) = \{ y \in \mathbf{R} / d(x, y) < r\}$ |

Un *entorno* centrado en $x_0 \in$ **R** es un intervalo abierto de la forma:

$$]x_0 - r; x_0 + r[$$

***r*** es el radio del entorno y es un número real estrictamente positivo ***r > 0***. La longitud del entorno es igual al doble del radio.

**37. Determinar** los siguientes entornos abiertos de R:

a) de centro 3 y radio 2

b) de centro (-1) y radio 3

c) de centro 0 y radio r = 1.

**38. Resolver** las siguientes ecuaciones en R:

| | | |
|---|---|---|
| a) $\|x\|=3$ | e) $\|x+1\|=0$ | i) $\|-x\|+\|2x\|=\|8x\|-7$ |
| b) $\|x-2\|=3$ | f) $\|2-x\|=3$ | j) $-\|x\|+6=\|x\|$ |

**39. Resolver** las siguientes inecuaciones y representar el conjunto solución en la recta numérica:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $x+2>5$ | d) $\|x\|>2$ | g) $-(x-1)(x-2)>0$ | j) $-3x+2<5$ |
| b) $x+2\geq5$ | e) $\|x-1\|\geq3$ | h) $(3-x)/(x-2) \leq 0$ | k) $x(x-2) \leq 0$ |
| c) $x(x-2)>0$ | f) $\|x-1\|\leq3$ | i) $(x+1)/x >0$ | l) $\left\|x-\sqrt{2}\right\| < 5$ |

## SUMATORIA

En muchas situaciones se presenta la conveniencia de abreviar la notación de una suma cuyos términos admiten cierta ley de formación. Para ello, se utiliza un operador matemático llamado *"sumatoria"*, cuyo símbolo es $\Sigma$ (letra griega ***sigma*** mayúscula).

<u>Ejemplo</u>: la suma de los 10 primeros números naturales

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

se abrevia, usando el operador sumatoria, como

$$\sum_{i=0}^{i=9} i$$

que se lee "**suma** (o **sumatoria**) de $i$, cuando $i$ varía desde 0 hasta 9".

La letra $\boldsymbol{i}$ indica cuál es el número que va variando a lo largo de la suma. Las igualdades debajo y sobre el símbolo sumatoria indican desde y hasta dónde varía *"$\boldsymbol{i}$"*.

Ejemplo: la suma $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$ puede abreviarse

$$\sum_{i=0}^{i=4} 2^i = 31$$

Inversamente, si se desea **desarrollar** la suma $\sum_{i=1}^{i=5}(3.i)$ se tendrá

$$\sum_{i=1}^{i=5} 3i = 3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 + 3.5$$

que se lee *"sumatoria de 3 por i, cuando i varía desde 1 hasta 5"*

El operador sumatoria es nada más que **un modo de abreviar la suma, no de resolverla**.

La letra $\boldsymbol{i}$ se llama índice de la sumatoria, puede tomar **sólo valores naturales** ($i \in \boldsymbol{N}$ ) y puede ser sustituida por cualquier otra letra; es decir, da lo mismo escribir

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{2}{i} \quad \text{que} \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2}{k}$$

ya que ambas expresiones indican que se debe dar al índice valores enteros consecutivos que van desde *"1 hasta n"*, y después sumar los términos así obtenidos. En ambos casos se obtiene la misma expresión.

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{n}$$

Es decir

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{2}{i}=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\ \dots+\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{2}{k}$$

<u>Ejemplo</u>. **Desarrollar** la siguiente suma: $\sum_{i=4}^{i=7} 2^i$

Solución:

$$\sum_{i=4}^{i=7} 2^i = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$$

**40. Hallar** los valores numéricos de las siguientes sumatorias.

$$a)\sum_{k=1}^{5} k \qquad b)\sum_{i=1}^{3}\frac{i+1}{2} \qquad c)\sum_{k=0}^{3} k^2 \qquad d)\sum_{k=1}^{6}(2^k - 2^{k-1})$$

$$e)\sum_{k=1}^{5}(k^3+3k^2) \qquad f)\sum_{i=2}^{5} i! \qquad g)\sum_{k=1}^{100} k$$

**Estudiar** las propiedades de la sumatoria.

- Para cualquier entero positivo *n*, se verifica:

$$a)\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad b)\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$c)\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad d)\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**41. Calcular** las sumatorias siguientes usando propiedades y sabiendo que ***n*** es un entero positivo:

$$a)\sum_{k=1}^{100} k \qquad b)\sum_{k=1}^{n} 2k-1 \qquad c)\sum_{k=1}^{n}(2k-3)(k+1)$$

**42. Indicar**, usando la notación $\Sigma$, las siguientes sumas:

a) La suma de los primeros *n* enteros positivos pares. ¿Cuánto vale esta suma?

b) La suma de los primeros *n* enteros positivos impares. ¿Cuánto vale esta suma?

c) $S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + \cdots$

d) $S = 1 + \left(\frac{1}{3+a}\right)^2 + \left(\frac{1}{5+a}\right)^4 + \left(\frac{1}{7+a}\right)^6 + \left(\frac{1}{9+a}\right)^8 + \left(\frac{1}{11+a}\right)^{10} + \cdots \quad con\ a \neq 0$

**Estudiar** el "Teorema del Binomio".

Si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son números reales distintos de cero y $\boldsymbol{n}$ es un entero positivo, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

donde $\binom{n}{k}$ es un número combinatorio que indica "combinaciones de $n$ elementos tomados de a $k$". [1]

Esta igualdad, conocida con el nombre de **Teorema del Binomio**, o **Binomio de Newton**, **permite obtener el resultado de la potencia n-ésima de un binomio.**

Ejemplo. Se desea calcular el resultado de$(1+x)^3$, empleando el teorema del binomio.

*Solución:* Aplicando el teorema, se tiene que

$$(1+x)^3 = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{k} 1^{3-k} x^k = \binom{3}{0} 1^{3-0} x^0 + \binom{3}{1} 1^{3-1} x^1 + \binom{3}{2} 1^{3-2} x^2 + \binom{3}{3} 1^{3-3} x^3$$

[1] Número de combinaciones $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ , donde $n! = n.(n-1).(n-2) \ldots.\ 3.2.1$ es el factorial de *n*.

$$= \left[\frac{3!}{(3-0)!\,0!}\right] 1^3 . 1 + \left[\frac{3!}{(3-1)!\,1!}\right] 1^2 . x + \left[\frac{3!}{(3-2)!\,2!}\right] 1^3 . x^2 + \left[\frac{3!}{(3-3)!\,3!}\right] 1^0 . x^3$$

$$= \left(\frac{6}{6.1}\right) . 1 + \left(\frac{6}{2.1}\right) . x + \left(\frac{6}{1.2}\right) . x^2 + \left(\frac{6}{1.6}\right) . x^3$$

$$= 1 . 1 + 3 . x + 3 . x^2 + 1 . x^3$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

**43. Desarrollar** las siguientes potencias:

$(2x - 1)^4$ , $(\sqrt{x} - 2)^5$ , $(2a - 3)^7$ , $\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}\right)^6$ , $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^3$

## ESPACIO DE PROBLEMAS DE LA UNIDAD

**1. Resolver**, en caso de ser posible, los problemas que siguen.

a. **Espesor de una lámina**: Una compañía fabrica laminados industriales de 2 pulgadas de espesor con una tolerancia de 0,003 pulgadas.

i) Escribir el intervalo de espesores posibles para el material laminado.

ii) Escribir una desigualdad que tenga valor absoluto que describa el intervalo de espesores posibles para el material laminado.

b. **Escalas de temperatura**: En la caja que viene embalada una película se indica que debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30 °C. La relación entre grados Celsius y grados Farenheit está dada por: C=5/9(F-32), ¿qué temperaturas corresponden en la escala Farenheit? Escribir la respuesta en forma de intervalo.

**c**. En un experimento de laboratorio se trabaja con una muestra inicial de $15.10^6$ bacterias. Luego de colocar un preparado la cantidad de bacterias comienza a duplicarse cada 5 segundos.

i) ¿Cuántas bacterias tendrá la muestra a los 15 segundos? Y al minuto?

ii) ¿Qué lapso de tiempo mínimo deberá transcurrir para que el número de bacterias de la muestra supere los mil millones? (Sugerencia: utilizar una tabla)

**2. Completar** el siguiente cuadro con la expresión simbólica o la expresión coloquial, según corresponda:

| | |
|---|---|
| El triple de un número. | |
| El siguiente de un número. | |
| El anterior de un número. | |
| | 3x+2 |
| El cuadrado del siguiente de un número. | |
| | $x^5$ |
| El cubo de la suma entre un número y tres. | |
| El cubo de un número, más tres. | |
| El duplo de un número más el triplo de otro número. | |
| El cuadrado de la suma de dos números. | |
| | $y^2 + x^3$ |
| El doble del cubo de un número. | |

**3. Resolver**:

**a**. Los dos tercios de un número más 1 es igual a cinco cuartos del mismo número. ¿Cuál es el número?

**b**. El perímetro de un triángulo es 300 m y uno de sus ángulos interiores es de 60°. Si el triángulo es equilátero, ¿cuáles son las medidas de todos sus lados?

**c**. Se tiene un patio rectangular de 14 m por 5m. Se quieren embaldosar los dos tercios del patio ¿Cuántos $m^2$ quedarán sin embaldosar?

**d**. En una ciudad **A** votan al partido X un 11/16 de la población, mientras que en la ciudad **B** lo hace el 65%. ¿Qué ciudad vota proporcionalmente más a dicho partido?

**e**. Tres socios invierten sus ahorros en un negocio. El primero aporta 1/3 del capital, el segundo 2/5 y el tercero el resto. Al cabo de tres meses reparten beneficios de $ 100.000. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

**f**. Un auto 0 km cuesta 520000$. Si se desvaloriza a razón del 10% anual, ¿cuál será su valor transcurridos 2 años?

**g**. De una ruta se ha inaugurado 1/3 de su longitud. Por otra parte 1/4 de la misma está en construcción y quedan 120 km en los cuales aún no se han iniciado las obras. ¿Cuál es la longitud de la ruta?

**h**. Un número natural de 3 cifras y capicúa es tal que la suma de sus cifras es 14 y la cifra de la unidad es el triple de la de la decena. ¿Cuál es dicho número?

**Bibliografía**:


Falco, Alfredo.(2004). *Matemática Preuniversitaria*. Universidad Nacional de Córdoba.

Gentile, Enzo (1991). *Aritmética Elemental en la formación matemática*. Edit. OMA. Arg

Montaldo, R.; Casetti, L.; Welti, Marta (2000). *Matemática básica para ingresar a la Universidad*. Universidad Nacional de Cuyo. Argentina

Novelli, A. (1997) *Elementos de Matemática*. Secretaría de Bienestar y Extensión Universitaria. Universidad Nacional de Luján. Buenos Aires. Argentina.

Rabuffetti, Hebe. *Calculo I*. X Edición. 3° Impresión. Editorial El Ateneo.

Tarzia, Domingo A. (2000), *Curso de Nivelación de Matemática.* Mc Graw Hill. Argentina.

# ACTIVIDADES PROPUESTAS

## *¡Para seguir avanzando!*

**Actividad 1**: Resolver, si es posible, las siguientes operaciones. ¿Alguno de los resultados obtenidos es un número racional? Justificar la respuesta.

a) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ b) $\sqrt[5]{2^{10}}+\sqrt[10]{2^5}$

c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ d) $\sqrt{\sqrt[5]{16}}$

**Actividad 2**: Colocar el signo que corresponda: *mayor, menor o igual*:

a) $(-3)^4$.....81 b) $(-1)^{2k}$ …..1, $k \varepsilon N$ c) $(-1)^{2k+1}$ …..1, $k \varepsilon N$

d) $2^0$.....1 e) $\pi$ …..3,14 f) $\frac{1}{4}$ …..0,25

g) $\frac{1}{3}$ …..0,3 h) $\frac{31}{15}$ ….. $\frac{33}{17}$ i) $-\frac{2}{3}$ ….. $-\frac{5}{7}$

**Actividad 3**: El diámetro del átomo de hidrógeno puede estimarse en $10^{-10}$ m y su masa alrededor de $1{,}7.10^{-27}$kg. El diámetro de un protón, que es la única partícula que compone el núcleo del hidrógeno, es de aproximadamente $10^{-15}$ m. Sin embargo, el núcleo concentra prácticamente el 100% de la masa del átomo.

a) ¿Qué fracción representa el diámetro del núcleo respecto del diámetro del átomo?

b) Llamando $d_A$ y $d_N$ a los respectivos diámetros, escribir en símbolos la relación existente entre ellos.

**Actividad 4**: Responder

¿Cuántos ceros tiene la representación decimal del número $78.\ 10^n$ ($n \in N$)?

¿Cuántos ceros tiene la representación decimal de $5{,}81.\ 10^n$ ($n \geq 3$)?

¿Cuántos ceros después de la coma tiene la representación decimal de $2.\ 10^{-n}$?

¿Cuál es la diferencia entre los números aproximados 200 y $2.10^2$ ?

**Actividad 5**: Resolver las siguientes ecuaciones en R:

a) $3x+\frac{2}{5}=3$ b) $2-x=\frac{4}{5}$ c) $x-\frac{2}{3}=1-\frac{1}{2}$

d) $\frac{2}{3}-x+1=\frac{2}{7}$ e) $4x-16=0$ f) $4-4y=12$

g) $\frac{3}{y}+\frac{4}{y}=12$ h) $\frac{3}{y}+\frac{4}{y}=0$ i) $3x(2x+1)=0$

j) $\frac{3}{x-1} = 6$ k) $3(y-2) + (y-2) = \frac{3}{2}$

h) $x^2 - 4 = 12$ i) $x^2 - 1 = 0$ j) $x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

k) $-x^2 - 6x - 5 = 0$ l) $2x^2 - 4x = 12$ m) $x^3 - 8 = 0$

**Actividad 6**: Resolver las siguientes ecuaciones en R:

a) $\log 0{,}01 = x$ b) $\log_{1/2} x = -1$ c) $\log_{27} x = 1/3$

d) $\log_3 \mathrm{x}^2 + \log_3 x - 6 = 0$ e) $10\log_5 \mathrm{x} - 5\log_5 x + 5 = 0$

f) $\log 10 = 5 - 3\log x$ g) $\ln x - \ln x^3 = 8$ h) $(\ln(x-2))^2 = 9$

i) $|\ln x| = 1$ j) $|\ln x^2| = 1$ k) $(\ln x)^3 = -7$ l) $(\ln x)^2 = -\sqrt{2}$

**Actividad 7** : Completar en las líneas de puntos, con los signos <, >, ≥, ≤ o =; de modo que las afirmaciones resultantes sean verdaderas, siendo "***a***" real y "***n***" natural:

a) Si a>1, entonces $a^2$ …. a
b) Si 0<a<1, entonces $a^2$ …. a
c) Si a=1, entonces $a^2$ …. a
d) Si a>1, entonces $a^n$ …. a
e) Si 0<a<1, entonces $a^n$ …. a
f) Si a=1, entonces $a^n$ …. a
g) Si a>1, entonces $a^{-n}$ …. a
h) Si 0<a<1, entonces $a^{-n}$ …. a
i) Si a=1, entonces $a^{-n}$ …. a

**Actividad 8**: Verificar, con ejemplos, la siguiente propiedad de orden de los racionales:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \ \ si\ y\ sólo\ si\ \ a * d < b * c\ siendo\ a, b, c\ y\ d\ némeros\ enteros, b > 0\ y\ d > 0$$

*La propiedad anterior se verifica si alguno (o ambos) denominadores son negativos?. ¿Cómo haría para saber si 3/-2 es mayor o menor que -6/5?*

**Actividad 9**: Escribir un número irracional mayor que 1 y menor que $\sqrt{2}$

**Actividad 10**: Representar sobre una recta los siguientes números reales: $\frac{1}{2}\ ; \frac{1}{4};\ -\frac{1}{4};\ -1; 3; \sqrt{2}\,; -\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}; e\ ; \pi$

**Actividad 11**: Resolver las siguientes ecuaciones

a)|x+2|=3 b) |x-1|=-3 c) |x-3|+|4x-12|=25

d) |-x-2|=3 e) $\left|\frac{x}{2}\right| = 0$ f) $\left|\frac{5}{x}\right| = 2$ g) |x|+|x-3|=0

**Actividad 12**: Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $1/2x + 3 \geq 5/3x - 7$ b) $(x-1)(x-2) \geq 0$ c) |x-1|≤0 d)-3<|2x-1|<5

e) $-x + 7 \leq -3$ f) |x|≤2 g) |x-1|≤-1 h) |x-1|≥-1

**Actividad 13**: Sea un rectángulo de base b y altura a. Escribir en lenguaje algebraico las siguientes informaciones relativas al rectángulo:

a) La altura es el doble de la base.

b) La base excede en 5 unidades a la altura.

c) La base es la mitad de la altura.

d) La base es 3/5 de la altura.

e) El perímetro del rectángulo es de 137 m.

f) La mitad del perímetro del rectángulo es de 137 m.

g) El área del rectángulo es de 1500 $m^2$.

**Actividad 14**: Determinar, para qué valores reales de a la expresión $\frac{2a-4}{5} - \frac{a-1}{6}$, se anula.

**Actividad 15**: Determinar, para qué valores reales de "*a*" la expresión $\frac{2a-4}{5} - \frac{a-1}{6}$, toma los mismos valores que la expresión $1 - \frac{a-3}{3}$.

**Actividad 16**: Determinar, para qué valores reales de "*a*" la expresión $\frac{2a-4}{5} - \frac{a-1}{6}$, toma el valor 12.

**Actividad 17**: Escribir en lenguaje algebraico y luego resolver las siguientes cuestiones:

a) ¿Existe un número entero que al sumarle su consecutivo da 25? ¿y 26?

b) ¿Existen dos números enteros consecutivos pares, tales que sumados den 35? ¿y 34? ¿y 32?

**Actividad 18**: Resolver:

Una planta de 18 cm de altura creció 1/6 de su altura durante la primera semana de observación. Al cabo de la segunda semana creció 1/7 de la nueva altura. En la tercera semana creció 3 cm. ¿Cuál es la altura de la planta al cabo de la tercer semana? ¿En qué porcentaje resultó incrementada la altura de la planta? ¿Qué fracción representa la altura inicial respecto a la final?

**Actividad 19**: Determinar la distancia entre los siguientes puntos

i. (-3/2, 0)   ii. (-3, 5)   iii. (4, 17/4)   iv. (-½ , 3)

**Actividad 20**: Hallar los puntos medios de cada par. Representar gráficamente el intervalo e indicar el centro del mismo.

**Actividad 21**: Expresar los intervalos del ítem 19 usando la definición de distancia y de entorno.

**Actividad 22**: Resolver la desigualdad $|x - 3| \geq 1$, interpretándola en el sentido de las distancias.

**Actividad 23**: Resolver y representar en forma gráfica: a) $|2x - 1| < 3$   b) $|2x - 1| > 3$. ¿Alguno de estos conjuntos representa un entorno? Explicar.

**Actividad 24**: Escribir como intervalos y como entornos (si es posible), los siguientes conjuntos de números reales:

$A = \{x / -1 < x < 3\}$   $C = \{x / -1 < x \leq 3\}$

$D = \{x / -7 \leq x < -2\}$   $F = \{x / |x - 2| < 5\}$

$G = \{x / 0 < |x - 3| < 1\}$   $H = |x - 2| < \delta, \quad \delta > 0$

# UNIDAD 3. POLINOMIOS. ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES.

## POLINOMIOS EN UNA VARIABLE.

Los polinomios permiten desarrollar diferentes cálculos matemáticos, por ejemplo, nos permite acercarnos a una función derivable. Sin embargo no es la única disciplina científica que utiliza polinomios en sus estudios e investigaciones, también son requeridos desde la química, la física y las ciencias sociales, como la economía.

En esta unidad revisaremos los conceptos y definiciones de monomio, polinomio, grado, como se ordenan, completan y factorizan polinomios para que pueda ser utilizados en resolución de ejercicios matemáticos. Resolveremos operaciones con polinomios.

## Definición de polinomio.

Se llama ***polinomio*** en la variable $x$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbf{R})$ a toda expresión de la forma

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

Cada sumando $\boldsymbol{a_ix^i}$ se llama ***término de grado i*** $(i = 0, 1, \dots, n)$ del polinomio (P).

Los números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{i-1}, \dots a_i, \dots, a_{n-1}, a_n,$ $a_i \in$ **R** (números reales) se llaman ***coeficientes*** de cada término de $P$.

El número $\boldsymbol{a_n}$ se llama ***coeficiente principal***.

El número $\boldsymbol{a_0}$ se llama ***término independiente.***

Los términos $\boldsymbol{a_ix^i}$ de **igual grado** se llaman **semejantes**.

El mayor número $\boldsymbol{n}\in$ $\mathbf{N_0}$ (conjunto de los números naturales incluido el cero) indica el ***grado*** de $P$ si $a_n \neq 0$(distinto de cero). Se puede decir también que el grado de P está dado por el mayor de los exponentes de la variable $x$ con coeficiente distinto de cero.

El polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero, es el ***polinomio nulo***. Al polinomio nulo no se le asigna grado.

**1. Completar** el cuadro.

| **Polinomio** | **Grado** | **Coeficiente principal** | **Término Independiente** |
|---|---|---|---|
| $P(x) = -5x^3 + 3x^4 - x + 2x^2 + 1$ | 4° | | $a_0 = 1$ |
| $Q(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$ | | $a_3 = \frac{1}{2}$ | |
| $R(x) = \sqrt{3}$ | cero | | |
| $S(x) = 0$ (Polinomio nulo) | | Todos sus coeficientes son nulos | Todos sus términos son nulos |

**2. Responder** las siguientes cuestiones, considerando los polinomios dados en 1.

a) ¿Cuál es el grado de $Q(x)$? ¿Y el de $S(x)$?

b) ¿Cuál es el coeficiente principal de $P(x)$? ¿Y el de $R(x)$?

c) ¿Cuál es el término independiente de $Q(x)$? ¿Y el de $R(x)$?

**Estudiar** las siguientes definiciones.

*Dos polinomios son **iguales** si son de igual grado y los coeficientes de los términos de igual grado, son iguales entre sí (principio de identidad). Si dos polinomios son iguales y no nulos, entonces son de igual grado.*

*El polinomio cuyo coeficiente principal es igual a 1 se llama **mónico**.*

*Un polinomio de dos términos se denomina binomio, de tres términos trinomio, de cuatro términos cuatrinomio.*

*Un polinomio está **completo**, respecto de la indeterminada $x$, cuando en el mismo están presentes todos los términos de exponente natural menores que el término de mayor exponente de $x$, figurando también el término de grado cero (término independiente).*

**3. Determinar**, justificando en cada caso, cuál de las siguientes expresiones representa un polinomio. En caso afirmativo, indicar grado, coeficiente principal y término independiente.

| Expresión | ¿Es un polinomio? | Grado | Coeficiente principal | Término Independiente |
|---|---|---|---|---|
| $T(x) = \sqrt{2}\,x^3 - 3x + x^5 - 4$ | | | | |
| $P(x) = \frac{1}{2}x - 2x^4 - \sqrt{x}$ | | | | |
| U(x) =25 | | | | |
| $L(x) = 2x - \sqrt{7}$ | | | | |

**4. Responder** las siguientes cuestiones.

a) Hallar el valor de $P(x) = x^3 - 2x + 1$ respectivamente para

$x = 1,\ x = -1, x = 0, x = \sqrt{2}.$

b) En cada caso, hallar $k$ para el valor numérico indicado:

$i)\ P(x) = 2x^2 - 6x - k$ siendo $P(1) = 7$

$ii)\ P(x) = -2x^4 - 6x^3 + 5x - k$ siendo $P(-2) = 35$

c) Dados los siguientes polinomios, completarlos y ordenarlos, indicando grado de los mismos.

$i) P(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{6}x^3 - 3x^2$ $\qquad ii) R(x) = 1 - \sqrt{3}x^2 - 3x^5 - \frac{2}{3}x$

$iii) T(x) = 0{,}5 - 7x^3 - 2$ $\qquad iv) Q(x) = -x^4 - x + 2x^2 - \frac{2}{3}$

d) Predecir el grado de los siguientes polinomios sin realizar las operaciones.

$i) P(x) = (3 - 2x) + (x - 2)$ $\qquad$ $ii) R(x) = (-2\sqrt{x} - 1)(-2\sqrt{x} + 1)$

$iii) T(x) = (2x^2)(x - 2)$ $\qquad$ $iv) Q(x) = (-x + 2x^3 - x^2) - (x + \sqrt{3}x^4)$

e) Escribir un polinomio mónico de quinto grado.

f) Escribir un polinomio $P(x)$ de segundo grado y coeficiente principal -3.

## Operaciones en el Conjunto de Polinomios en una variable Real.

En el conjunto de los polinomios en una variable real se definen dos operaciones: la suma y el producto. Estas operaciones cumplen con las propiedades algebraicas estudiadas en el conjunto de los números reales, excepto la propiedad del inverso. (¿Por qué?). Se estudian asimismo, la resta y la división.

## Suma de polinomios.

Dados los polinomios $P$ y $Q$, definidos por:

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \quad \text{y}$$

$$Q(x) = bx^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

La suma $P(x)$ + $Q(x)$ será igual a:

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + (a_n + b_n)x^n = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i$$

*El resultado de la suma entre $P$ y $Q$, es un nuevo polinomio cuyos coeficientes se obtienen sumando los coeficientes correspondientes a los términos de igual grado (términos semejantes) de $P$ y $Q$, respectivamente.*

Ejemplo. Dados los polinomios:

Si $P(x) = -3x^3 + 2x - x^2 - 1$ y $\quad Q(x) = -x^4 - 2x^3 - 5$,

$$\boldsymbol{P(x)} + \boldsymbol{Q(x)} = (-3x^3 + 2x - x^2 - 1) + (-x^4 - 2x^3 - 5) =$$
$$= (0 - 1)x^4 + (-3 - 2)x^3 + (-1 + 0)x^2 + (2 + 0)x + (-1 - 5) =$$
$$= -x^4 - 5x^3 - x^2 + 2x - 6$$

Otra forma alternativa de efectuar la suma (y la resta): se escribe el primer polinomio y luego, debajo, se escribe/n el/los siguiente/s ubicando los términos semejantes encolumnados. Si falta algún término, el coeficiente es cero.

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & P(x) & = & 0x^4 & - & 3x^3 & - & 1x^2 & + & 2x & - & 1 \\ & Q(x) & = & -x^4 & - & 2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 5 \\ \hline R(x) = & P+Q & = & -x^4 & - & 5x^3 & - & x^2 & + & 2x & - & 6 \end{array}$$

El procedimiento es aplicable para suma de más de dos polinomios.

# Resta de polinomios.

Ejemplo. Sean los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 8, \text{ y } Q(x) = x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 5.$$

La resta **P - Q**

$$P(x) - Q(x) = P(x) + \left(-Q(x)\right) =$$

$$= (x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 0x + 8) + (-x^5 - 5x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 0x - 5) =$$

$$= (1-1)x^5 + (2-5)x^4 + (-7+0)x^3 + (0+4)x^2 + (8-5) =$$

$$= -3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3$$

# Producto de polinomios.

Para calcular el producto de dos polinomios, se usa la *propiedad distributiva* del producto respecto de la suma y/o de la resta. Es decir, se multiplica cada término de un polinomio por cada término del otro y luego se suman los términos semejantes.

Ejemplo

a) Efectuar el producto entre los polinomios $T(x) = x - 2$ y $R(x) = -3 + x$.

$$T(x)R(x) = (x-2)(-3+x) = x(-3) + xx + (-2)(-3) + (-2)x =$$

$$= -3x + x^2 + 6 - 2x =$$

$$\boxed{= x^2 - 5x + 6}$$

Es posible **asociar** los polinomios y efectuar el producto, cuando involucra a más de dos polinomios.

b) Determinar el producto entre P, Q y S, dados

$$P(x) = -x + x^3 - 2x^2, \quad Q(x) = 3x - \tfrac{1}{2}x^2, \quad S(x) = 2x$$

se efectúa el producto $Q \bullet S$, y luego se multiplica $P$ por ese polinomio.

$$Q(x)S(x) = \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)2x = 3.2xx \quad - \frac{1}{2}.2\,x^2x = \; 6x^2 - x^3$$

Luego,

$$P(x)(Q(x)S(x)) = (-x + x^3 - 2x^2)(6x^2 - x^3) =$$
$$= \; -6x^3 + x^4 + 6x^5 - x^6 - 12x^4 + 2x^5 =$$
$$= -6x^3 - 11x^4 + 8x^5 - x^6$$

| Entonces, resulta: $P(x)Q(x)S(x) = P(x)(Q(x)S(x))$ |
| --- |

¿Cuál es el grado del polinomio resultante? ¿Está completo? ¿Qué se obtiene si se lo multiplica por $-\sqrt{2}$ ?

**5.** Dados $P(x) = 4x^3 + \frac{2}{3}\,x^2 - 2x + 3,\; Q(x) = \; 7 - x + 2x^3,$

$R(x) = 2x + 1 + 7x^2,\; T(x) = \; -2x^2,\; S(x) = x - 3$ **Resolver**:

i) $P(x) + Q(x) + R(x)$ ii) $P(x) - Q(x) - R(x)$

iii) $P(x) + 3Q(x) - 2R(x)$ iv) $T(x)S(x)$ v) $[S(x)]^2$

**6. Verificar** los siguientes resultados y, de ser necesario, **indicar** resultado correcto:

i) $x + x + x = 3x$ ii) $x^3x = 2x^4$ iii) $(x+2)^2 = x^2 + 4$

iv) $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$ v) $2x^2 3x^2 = 6x^4$ vi) $2x^2 + 3x^3 = 5x^5$

vii) $(3x)^2 = 3x^2$ viii) $x^5 : x = x^5$ ix) $x^2 + x^2 = 2x^2$

**7.** Cuando sea posible…

a) **Resolver** las operaciones indicadas en el ítem d) de la Actividad **4**.

b) Dados los polinomios: $P(x) = -2x^2 - 3$, $Q(x) = -x^3 + 1$, $T(x) = x + 2x^2 - 2$, $R(x) = -2x^2$, **hallar** mediante operaciones entre los mismos:

i) Un binomio de grado 5 y cuyo coeficiente principal sea positivo.

ii) Un polinomio de cuatro términos.

iii) Un monomio de grado 4.

iv) Un monomio de grado 5.

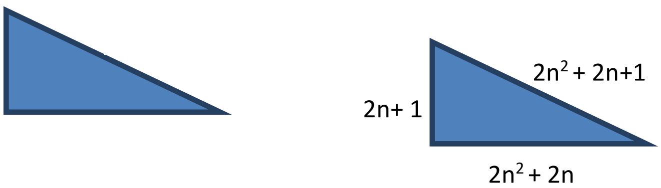
c) **Desarrollar** las potencias y productos indicados:

i)$(x+2)^2 =$ ii) $(x-2)^2 =$ iii)$(x-2)(x-2) =$ iv)$(x+2)(x-2) =$

v)$(-x-3)^2 =$ vi) $(x^2+5)^2 =$ vii) $2x(x-1)^3 =$ viii)$(\frac{2}{3}x-1)^3 =$

**8. Resolver** la siguiente cuestión.

El matemático griego Pitágoras conocía las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud entera, llamadas "*ternas pitagóricas*", con sólo dar valores a $n \in \mathbb{N}$:




**Demostrar** la veracidad de estas fórmulas. Generar algunos casos concretos.

## División de polinomios.

<u>Teorema</u>. **Algoritmo de la división**

*Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, y $Q(x)$ es un polinomio de grado $m$, $m \leq n$, entonces existen dos únicos polinomios $S(x)$ y $R(x)$ tales que*

$$\boldsymbol{P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)}$$

*siendo el grado de $\boldsymbol{R(x)}$ < grado de $\boldsymbol{Q(x)}$*

$P(x)$ es el dividendo, $Q(x)$ es el divisor, $S(x)$ es el cociente y $R(x)$ es el resto. Estas denominaciones pueden variar.

## Consecuencia de la división:

Toda fracción ***impropia***[2] de la forma $P(x)/Q(x)$ puede descomponerse en la suma de un polinomio y una fracción propia. Es decir:

$$\frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}} = \boldsymbol{S(x)} + \boldsymbol{R(x)}/\boldsymbol{Q(x)}$$

**Ejemplo**

Para encontrar el cociente y el resto de la división entre $P(x) = 2x^4 + x^2 - 2$ y $Q(x) = 2x^2 - 2$ .

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4 + 0x^3 + x^2 + 0x - 2 & 2x^2 - 2\,. \\ \cline{3-3}
- & (2x^4 \qquad\quad - 2x^2) & x^2 + \dfrac{3}{2} \\ \cline{1-2}
 & 0x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 2 & \\
- & (\ 3x^2 \qquad - 3) & \\ \cline{2-2}
 & 0x^2 \qquad + 1 &
\end{array}$$

¿Cómo se construye el polinomio dividendo, usando el cociente, el divisor y el resto?

Si el cociente es $S(x) = x^2 + \frac{3}{2}$ y el resto $R(x) = 1$. Entonces, se construye el dividendo $P(x)$ teniendo en cuenta que $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$. Así,

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2) + 1 = 2x^4 - 2x^2 + 3x^2 - 3 + 1 = 2x^4 + x^2 - 2$$

[2] Se denomina así la fracción $P(x)/Q(x)$ entre polinomios, donde el polinomio del numerador de la fracción es de mayor o igual grado que el polinomio del denominador.

**9. Dividir** $P(x) : Q(x)$ para los siguientes casos. Escribir el cociente y el resto.

a) $P(x) = 6x^5 + 5x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x$ , $Q(x) = 3x^2 + 2x - x^3$

b) $P(x) = x^5 - 2$ , $Q(x) = x^2 - 2$

## División sintética. Regla de Ruffini.

La división sintética es un procedimiento que permite simplificar la división entre un polinomio $P(x)$ de grado mayor que uno ( $grP(x) \geq 1$ ) y otro de la forma $Q(x) = x - a$;

> *Es decir, es posible "aplicar Ruffini" cuando el **divisor** es un binomio de primer grado y coeficiente principal 1.*

$S(x)$ es el cociente obtenido al dividir $P(x)$ entre $Q(x) = x - a$ y $R(x)$ es el resto. La ventaja de esta técnica es que se trabaja con los coeficientes.

<u>Ejemplo</u>:

Para obtener el cociente $S(x)$ al dividir $P(x) = 3x^3 - x^2 + 20x + 288$ entre $Q(x) = x + 4$, se procede de la siguiente manera:

1. Se ordena el polinomio $P(x)$ en forma decreciente según sean los exponentes.
2. En una fila(1) se colocan los coeficientes del dividendo con sus respectivos signos y el opuesto del divisor $\boldsymbol{a}$, conforme a la siguiente disposición:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $fila\ 1 \rightarrow$ | $+3$ | $-1$ | $+20$ | $+288$ | **- 4** $\rightarrow$ *"a"* |
| $fila\ 2 \rightarrow$ | $\downarrow$ | | | | |
| $fila\ 3 \rightarrow$ | 3 | | | | |

3. El primer coeficiente de la fila 1 (3 en este caso), es siempre el primer número de la fila 3. Éste se multiplica por (-4) y el producto se coloca en la fila 2, debajo del segundo coeficiente luego se suman, se obtiene así el segundo número de la fila 3. El proceso se repite hasta obtener el último número.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $fila\ 1 \rightarrow$ | 3 | $-1$ | $+20$ | $+288$ | -4 |
| $fila\ 2 \rightarrow$ | $\downarrow$ | -12 | +52 | -288 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $fila\ 3 \rightarrow$ | 3 | -13 | +72 | 0 |

El último número de la fila 3, en este caso 0, es el residuo (**resto 0**) de la división. Los demás números de la fila 3 son los coeficientes del cociente. El **grado del cociente** será **uno menos** que el grado de $P(x)$.

Por tanto, el cociente $S(x) = 3x^2 - 13x + 72$ y el resto $R(x) = 0$.

**10. Responder** las siguientes cuestiones Siendo $P(x)$ el polinomio dividendo y $Q(x)$ el polinomio divisor.

a) ¿En qué casos es posible aplicar la división simplificada (*técnica de Ruffini)* y en cuáles no?

b) Calcular el cociente $S(x)$ y el resto $R(x)$ en cada caso, aplicando Ruffini cuando sea posible.

| | $P(x)$ | $Q(x)$ | | $P(x)$ | $Q(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $4x^3$ | $2x^2$ | 5 | $x^3$ | $x + 5$ |
| 2 | $-8x^9 + \frac{3}{2}x^5 - x^4$ | $-\frac{3}{7}x^4$ | 6 | $\frac{1}{3}x^5 - x^3 - 3x - 1$ | $-\frac{2}{3}x^2 - 3$ |
| 3 | $6x^5 - 9x^2 + 3x$ | $x - 1$ | 7 | $27 - x^3$ | $x + 3$ |
| 4 | $2x^4 - 6x^2 - 16x$ | $2x - x^2$ | 8 | $2x^3 - 2x + 1$ | $\frac{1}{3}x - 5$ |

c) Verificar cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto. ($P(x) = S(x).Q(x) + R(x)$)

d) ¿Cómo podría expresar la fracción $P(x)/Q(x)$, teniendo en cuenta el resultado anterior para cada situación?

## Factorización de Polinomios. Teorema del factor. Teorema del resto.

Cuando el resto de la división es cero ($R(x)$=0), se puede expresar $P(x)$ como producto del cociente por el divisor,

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x)$$

Se dice entonces que $P(x)$ está ***factorizado***. $Q(x)$ y $S(x)$ son los ***factores*** de $P(x)$

Ejemplo

Sea $P(x) = 12x^3 + 33x^2 - 2x + 21$ y $Q(x) = x + 3$, entonces

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 12x^3 + 33x^2 - 2x + 21 & x + 3 \\ \cline{3-3}
- & & 12x^2 - 3x + 7 \\
 & 12x^3 + 36x^2 & \\ \cline{1-2}
 & 0x^3 \quad - 3x^2 - 2x + 21 & \\
- & & \\
 & -3x^2 - 9x & \\ \cline{2-2}
 & 0x^2 + 7x \ + 21 & \\
- & & \\
 & 7x \ + \ 21 & \\ \cline{2-2}
 & 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

Luego, $P(x) = Q(x) \cdot S(x) = (12x^2 - 3x + 7)(x + 3)$

Verificación $\quad (12x^2 - 3x + 7)(x + 3) = 12x^3 + 36x^2 - 3x^2 - 9x + 7x + 21 =$
$12x^3 + 33x^2 - 2x + 21,$

Entonces, $(12x^2 - 3x + 7)$ y $(x + 3)$ son ***factores*** de $12x^3 + 33x^2 - 2x + 21$.

**Estudiar** los siguientes Teoremas

> ***Teorema del residuo (resto)***
>
> Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces el residuo (resto) $R(x)$ al dividir $P(x)$ entre $(x - a)$, es $R(x) = P(a), a \in R$.

Ejemplo

Calcular el residuo de la división entre $P(x) = 3x^2 + 5x - 28$ y $Q(x) = x - 3$.

Solución.

Será $R(x) = P(a)$, por el teorema del resto. Entonces,

$$R(x) = P(3) = 3(3)^2 + 5(3) - 28 = 14.$$

Por tanto se concluye que $P(x)$ no es divisible por $Q(x) = x - 3$.

***Teorema del factor***

*Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, y si $x - a$ es un factor de $P(x)$, entonces, $\boldsymbol{a}$, es una raíz de $P(x)$. Además si $\boldsymbol{a}$ es una raíz de $P(x)$, $x - a$ es un factor de $P(x)$.*

***Raíz de un polinomio***

*Dado un polinomio $P(x)$, si existe un número real $\boldsymbol{a}$, tal que $P(a) = 0$, se dice que $\boldsymbol{a}$ es una raíz del polinomio $P(x)$.*

Ejemplo

Factorizar $P(x) = 3x^3 - x^2 + 20x + 288$ conociendo un factor $(x + 4)$

Solución.

1) Si $(x + 4)$ es factor de $P(x)$ se verifica que la división es exacta. Para comprobarlo se puede aplicar Teorema del resto.

Siendo $a = -4$

$R = P(-4) = 3(-4)^3 - (-4)^2 + 288 = 0$, al ser cero la división es exacta.

2) Para encontrar el otro factor $S(x)$, se efectúa la división entre $P(x)$ y $Q(x)$.

$$S(x) = 3x^2 - 13x + 72,$$

3) Resulta, $P(x) = (3x^2 - 13x + 72)(x + 4)$

Ejemplo

Si $P(x) = (x - 3)(x - 2)$, entonces $x = 3$ y $x = 2$ son raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

**11.** Si $P(x)$ es un polinomio de grado 3 y sus raíces son $x = 2, x = 5$ y $x = -3$ . **Escribir** $P(x)$ en términos de sus factores, sabiendo que su coeficiente principal es (-2).

**Analizar**

a) si $x_1 = 1;\ x_2 = -1$ son raíces de $x^2 - 1$

b) si el polinomio $bx - 1$ tiene como raíz $x = b^{-1}$. (**b**$\in$ **R**, b$\neq$ 0).

**12. Hallar** las raíces de $P(x)$, si $P(x) = x\,(2x-5)(3-5x)$ y expresar a $P(x)$ como producto de sus factores de forma $(x-a)$

**13. Completar** el factor que hace falta para que se verifique la igualdad:

a) $2x^3 + 8x = \cdots(x^2+4)$

b) $3ax^2 - a^2x = (3x-a)\ldots\ldots$

c) $\ldots\ldots(-5x^2+4x) = -15x^2 + 12x$

d) $\left(\frac{3}{4} - x^2\right)\ldots\ldots = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^4$

**14. Resolver** las siguientes cuestiones:

1. Dado $P(x) = 2x^2 - x - 3$, verificar si es divisible por $(x+1)$ o por $(x-2)$. Efectuar la división por el factor correcto. ¿Existe otro factor por el que es divisible? Determine ese factor.

2. Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de $\boldsymbol{a}$ para que el resto de la división entre $P(x) = -x^5 + ax^3 + 9x^2 + 2x - 7$ y $Q(x) = (x-3)$ sea $-1$. Comprobar el resultado obtenido haciendo la división.

3. Averiguar, sin hacer la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 10):(x+4)$

c) $(x^6 - 1):(x-1)$

b) $(x^3 - x^2 + x + 14):(x+2)$

d) $(x^5 - 3x^2 + 2x):(x-4)$

4. Verificar que $-b/a$ es raíz del polinomio $ax + b$ $(a \neq 0)$.

5. Calcular las raíces de los siguientes polinomios:

a) $\sqrt{2}x - 3$ b) $-2x + 1/2$ c) $x - 3$ d) $x - c$ $(c \in R)$

6. Construir un polinomio $P(x)$, de primer grado que tenga la raíz $x_0 = 2$.

7. Construir un polinomio $P(x)$, de segundo grado que tenga la raíz $x_0 = 2$.

8. Construir un polinomio $P(x)$, de segundo grado que tenga las raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Construir un polinomio de quinto grado que tenga esas raíces.

9. Mostrar que el polinomio $x^2 - \sqrt{2}x + 2$ es factor de $x^3 + (\sqrt{2})^3$.

10. Comprobar, sin efectuar la división, que $x^{99} + 1$ es divisible por $x + 1$.

11. Sin necesidad de efectuar la división, se puede asegurar que el polinomio $P(x) = x^{50} + x^{25} - x - 1$ es divisible por $x - 1$. ¿Por qué?

**15. Estudiar** Si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ sin efectuar la división.

$P(x) = x^2 + x - 2$ ,a) $Q(x)$= $x + 2$ y b) $Q(x)$= $x - 3$. Comprobar el resultado obtenido efectuando la división simplificada (Ruffini). ¿Por qué otro factor es divisible? Escribir el polinomio $P(x)$ como producto de sus factores simples.

**16.** Para los **siguientes** polinomios (de la tabla) se pide:

i) Obtener sus raíces y comprobarlas.

ii) Usar las raíces reales obtenidas (siempre que sea posible) para factorear cada polinomio. Comprobar la factorización en cada caso.

| | | |
|---|---|---|
| a) $x^3 - x$ | b) $t^2 + 2t + 1$ | c) $2x^2 - 1$ |
| d)$x^2 + x - 6$ | e) $5x^2 - 1$ | f) $6x^2 - 7x + 2$ |

iii) Simplificar

| | | |
|---|---|---|
| $\dfrac{x^2}{x^2 + 2x}$ | $\dfrac{x^2 - 5x}{5 - x}$ | $\dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 - 9}$ |
| $\dfrac{8 - x^3}{x^2 - 2x}$ | $\dfrac{2x - 4}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$ | $\dfrac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ |

**17.** Hallar el valor de $k$, sabiendo que $x + 2$ es un factor de $P(x) = x^3 + kx^2 - 2kx + 4$.

## Ecuaciones Racionales.

Una ecuación racional es una igualdad de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

El numerador y el denominador de la fracción son polinomios en la variable $x$, $x$ pertenece al conjunto de los reales. Para resolverla, se deben tener en cuenta:

a. Verificar el conjunto de valores de $\boldsymbol{x}$ para los cuales tiene sentido la expresión racional, el denominador debe ser distinto de cero.

b. Recordar que $a/b$ = 0 si y sólo sí $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces el conjunto solución es el que resulte de resolver la ecuación equivalente $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

c. Si la ecuación racional tiene la forma $P(x)/Q(x)$ = $T(x)/R(x)$, para determinar el conjunto solución, ponerla en la forma $P(x)/Q(x)$ - $T(x)/R(x)$ = 0 efectuando las operaciones indicadas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{T(x)}{R(x)} = \frac{P(x)R(x) - T(x)Q(x)}{Q(x)R(x)} = 0$$

**<u>Ejemplo</u>**. Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación racional:

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 0$$

<u>Solución</u>

Se factoriza el polinomio $x^2 - 1$ en sus factores $(x - 1)$ y $(x + 1)$, resultando

$$\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x} = 0$$

En la ecuación dada, debe cumplirse $(x - 1)(x + 1) = 0$ y $x \neq 0$, entonces el conjunto solución se determina a partir de la condición $(x - 1)(x + 1) = 0$, de la que resultan dos raíces reales $x = 1; x = -1$ y el conjunto solución será CS = {1, -1}.

**18.** Resolver las siguientes ecuaciones racionales en R:

| | | |
|---|---|---|
| $a)\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 1$ | $b)\ \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 0$ | $c)\ \dfrac{3}{x + 1} + 2 = \dfrac{3}{x - 1}$ |
| $d)\ \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x + 1} = 1$ | $e)\ \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{8}$ | $f)\ \dfrac{3}{x - 2} = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{7}{(x - 1)(x - 2)}$ |

# Método de suma y resta

Para resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, se utilizará durante este curso el método conocido como *"método de suma y resta"*. A continuación, se resuelven en detalle sistemas por este método.

Ejemplo1: Resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 5 - 6y = 2x \end{cases}$$

*Solución:* Primero se ordena el sistema. Encolumnando las variables ordenadamente, el sistema queda

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 6 \quad (Ecuación\ 1) \\ 2x + 6y &= 5 \quad (Ecuación\ 2) \end{aligned}$$

Analizando los coeficientes de una de las variables; por ejemplo la $\boldsymbol{x}$.

En la *Ecuación 1* ($E1$) se tiene que el coeficiente de $\boldsymbol{x}$ es 4 y en la *Ecuación 2* ($E2$) su coeficiente es 2.

Entonces se busca al número tal que, multiplicado por el segundo coeficiente, dé como resultado el primer coeficiente, es decir:

$2 \,.\, r = 4$ de donde $r = 2$

Luego, se multiplica E2 por el número obtenido, se multiplica a ambos miembros para que la igualdad no se altere

$$2 \,.\, (2x + 6y) = 2 \,.\, 5 \qquad (2 \,.\, E2)$$

que da como resultado la nueva ecuación

$4x + 12y = 10.$ Esta nueva ecuación reemplaza a $E2$

El sistema ahora queda:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 6 \qquad (E1) \\ 4x + 12y &= 10 \qquad (2 \,.\, E2) \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones tienen iguales los coeficientes de $x$.

Se restan las ecuaciones, $(E1) - (2 \,.\, E2)$

$$
\begin{array}{r}
4x - 3y = 6 \\
- \quad 4x + 12y = 10 \\
\hline
0 - 15y = -4
\end{array}
$$

Reescribiendo nuevamente el sistema queda:

$$
\begin{array}{ll}
4x - 3y = 6 & (E1) \\
-15y = -4 & E1 - (2\,.\,E2)
\end{array}
$$

En la segunda ecuación $(E2)$ se ha eliminado el término que contiene la $\boldsymbol{x}$

Esto permite obtener el valor de $\boldsymbol{y}$; en este caso:

$$- 15y = -4$$

$$y = \frac{4}{15}$$

Para calcular el valor de $\boldsymbol{x}$ se sustituye el valor de $\boldsymbol{y}$ encontrado, en cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo en la $E1$:

$$4x - 3.\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}} = 6$$

$$x = \frac{17}{10}$$

Al obtener **un solo** par $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, se puede afirmar que el sistema es ***compatible determinado*** (tiene solución única). El par $\left(\frac{17}{10}, \frac{4}{15}\right)$ es la solución del sistema.

Cabe señalar que el procedimiento seguido hasta aquí para resolver el sistema no es el único, se ha optado por el mismo buscado una aproximación a un método utilizado para sistemas con mayor número de ecuaciones, utilizado en cursos posteriores de matemática y a lo largo de toda la carrera de Ingeniería.

Ejemplo2: Resolver el sistema

$$
\begin{cases}
x - 0{,}5y = 1 & (E1) \\
4x - 2y = 4 & (E2)
\end{cases}
$$

*Solución:* abreviando los pasos del ejemplo anterior, se tiene que

$$\frac{1}{4}\,.(E2) \rightarrow \frac{1}{4}\,.(4x - 2y) = \frac{1}{4}\,.4 \quad \rightarrow \quad x - \frac{1}{2}\,y = 1$$

Reescribiendo el sistema:

$$\begin{cases} x - 0{,}5y = 1 & (E1) \\ x - \dfrac{1}{2}\, y = 1 & (1/4\,.\,E2) \end{cases}$$

Restando $(E1) - (1/4\,.\,E2)$y reescribiendo se tiene que

$$\begin{cases} x - 0{,}5y = 1 & (E1) \\ 0 = 0 & (E1) - (1/4\,.\,E2) \end{cases}$$

Aunque pueda parecer extraña la segunda ecuación, es en realidad una consecuencia lógica de que ambas ecuaciones ( $E1$ y $E2$) son ecuaciones equivalentes, este sistema admite **infinitas soluciones**. Un sistema así denomina ***compatible indeterminado***.

Ahora bien, es necesario tener cuidado a la hora de interpretar la frase *infinitas soluciones*, si bien son efectivamente infinitos los pares $(x, y)$ que verifican el sistema, son sólo aquellos que verifiquen que $\boxed{x - 0{,}5y = 1}$ (la $E1$).

**Analizar** ¿Qué pares de puntos son soluciones del sistema?, ¿Cómo obtenerlos.

Ejemplo3: Resolver el sistema

$$\begin{cases} -2x - 3y = 1 (E1) \\ -x - (3/2)y = 4 (E2) \end{cases}$$

*Solución:* abreviando los pasos del ejemplo anterior, se tiene que

$$2\,.\,(E2) \quad \rightarrow \quad 2.\,(-x - (3/2)y\ ) = 2\,.\,4 \quad \rightarrow \quad -2x - 3y = 8$$

Reescribiendo el sistema:

$$\begin{cases} -2x - 3y = 1 \quad (E1) \\ -2x - 3y = 8 (2\,.\,E2) \end{cases}$$

Restando $(E1) - (2\,.\,E2)$ y reescribiendo se tiene que

$$\begin{cases} -2x - 3y = 1 (E1) \\ 0 = -8\ (E1) - (2\,.\,E2) \end{cases}$$

En este caso se arriba a una igualdad que no se satisface nunca (al contrario del sistema del ejemplo anterior); en matemática se dice que se ha llegado a un absurdo. Cuando esto ocurre, se dice que el ***sistema es incompatible*** y *no tiene solución*.

**19. Resolver y clasificar los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - 0{,}5y = 0 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\sqrt{3} - 3y = \sqrt{3} \\ x + y\sqrt{3} = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 1 = 2 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{5}x - 5y = \sqrt{5} \\ x - \sqrt{5}y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - y = 10 - 2x \\ 8x - 2 = 2y \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y - 4x - 1 = 0 \\ 3x = -4y + 18 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 5 = 4x - 6 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 4x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$

**20. Resolver** los siguientes problemas:

a) La suma de dos números es -42. El primero de ellos menos el segundo es 52.Cuáles son los números? Rta.: x =5 ; y = − 47

b) La diferencia entre dos números es 16. Tres veces el mayor de ellos es nueve veces elmás pequeño. ¿Cuáles son los números? Rta.: x =24 ; y = 8

c) La suma de dos números naturales es 98 y al dividir el mayor por el menor el cociente es 7 y el resto 10. ¿Cuáles son los números?

d) Cuando pagaste una cuota de $120 del viaje de estudios utilizaste 15 billetes de $ 5 y $10. ¿Cuántos billetes de cada denominación entregaste? Rta.: 6 billetes de $5;9 billetes de $10

e) A una reunión asistieron 200 personas entre hombres y mujeres, habiendo pagado los hombres $40 por cada entrada y las mujeres $20. ¿Cuántos hombres y cuantas mujeres había si en total recaudaron $5860?

f) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°. Si el menor de los ángulos mide la mitad del mayor y 14° grados menos que el intermedio. ¿Cuál es la medida de cada ángulo?

g) Un hotel de dos pisos tiene 54 habitaciones. Si las del primero duplican en número a las del segundo, ¿cuántas habitaciones tiene cada uno?

h) Juan y Carlos son profesores. Ambos llevan en total 46 años dando clases. Hace dos años, Juan llevaba 2,5 veces los años que tenía Carlos como profesor. ¿Cuántos años llevan en la enseñanza cada uno de ellos? Rta.: 32 y 14

i) El perímetro de un rectángulo es 86cm. El largo es 19 cm más grande que el ancho. Calcular el largo y el ancho. Rta.: l =31 , a = 12

**Bibliografía**:


Apostol, Tom. (1967) Calculus. Vol I. segunda Ed.

Falco, Alfredo.(2004). *Matemática Preuniversitaria*. Universidad Nacional de Córdoba.

Montaldo, R.; Casetti, L.; Welti, Marta (2000). *Matemática básica para ingresar a la Universidad*. Universidad Nacional de Cuyo. Argentina

Novelli, A. (1997) *Elementos de Matemática*. Secretaría de Bienestar y Extensión Universitaria. Universidad Nacional de Luján. Buenos Aires. Argentina.

Rojo, Armando. (1996) Algebra I. El Ateneo. Buenos Aires. Arg.

Tarzia, Domingo A. (2000), *Curso de Nivelación de Matemática.* Mc Graw Hill. Argentina.

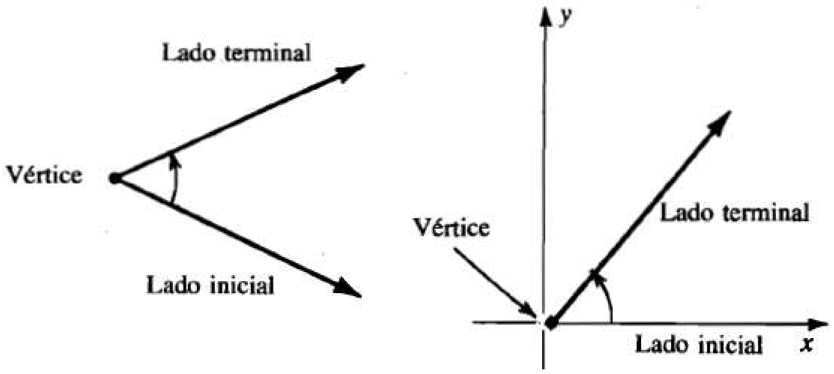
# UNIDAD 4. NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA Y NÚMEROS COMPLEJOS

## TRIGONOMETRÍA

La trigonometría fue inventada por los griegos hace más de 2000 años, en la búsqueda de métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. La palabra *trigonometría* deriva las palabras griegas *trigonon* (triángulo) y *metria* (medición). Originalmente su uso importaba en la construcción, navegación y astronomía. Actualmente, su utilidad se extiende para estudiar fenómenos de repetición periódica tales como el movimiento ondulatorio, corrientes eléctricas alternas, cuerdas vibrantes, péndulos oscilantes, ciclos de negocios y ritmos biológicos.

## Ángulo

Un **ángulo** es la región del plano determinada por dos rayos (sus **lados**) que tienen un punto extremo común (**vértice** del ángulo). Se considera un rayo fijo como **lado inicial** del ángulo que gira alrededor del vértice, en un plano, hasta la posición especificada por el otro rayo denominado **lado terminal**.




(a) (b)

Fig. 1

***Ángulo en posición libre***: el rayo (lado) gira desde su posición inicial a su posición terminal.

Todo ángulo es congruente con algún otro en posición normal.

***Ángulo en posición Normal***: situado en un sistema de coordenadas cartesianas. se hace coincidir el vértice con el origen y el lado inicial con el semieje positivo *x*

## Ángulo positivo – ángulo negativo

| Ángulos Positivos | Ángulos Negativos |
|---|---|
| Son aquéllos que giran en sentido opuesto a las manecillas del reloj. | Son aquéllos que giran en sentido de las manecillas del reloj. |

Los ángulos diferentes con lados iniciales y terminales coincidentes. Reciben el nombre de ***ángulos coterminales***. Fig. 2

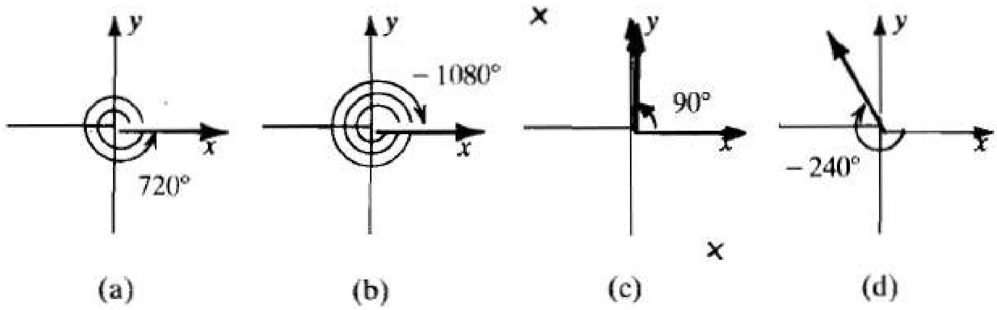



Fig. 2

### Medición de ángulos

## Sistema sexagesimal:

*Un grado sexagesimal* (° ) es la medida del ángulo central de un círculo, de amplitud igual a la 360 ava parte del mismo.

En este sistema una *vuelta completa equivale a 360 grados*. Esto se denota: 360°

**1. Responder**:

a) Un ángulo de 3/4 vuelta mide ……

b) Un ángulo de media vuelta mide ………

c) Un ángulo de un cuarto vuelta mide ……..

d) El primer cuadrante está comprendido entre ........ y……..

e) El segundo cuadrante está comprendido entre ........ y……..

f) El tercer cuadrante está comprendido entre ........ y……..

g) El cuarto cuadrante está comprendido entre ........ y……..

Las ***fracciones de grado son los minutos y los segundos***. Un grado equivale a 60 minutos, **1° ≡ 60’** , y un minuto equivale a 60 segundos, **1 ’ ≡ 60”.**

## Formas equivalentes de escribir un ángulo:

La medida de un ángulo se puede expresar como fracción de grado o lo podemos expresar en grados, minutos y segundos.

Ejemplo: Para escribir el ángulo α = 42° 30´ 15” como fracción de grado es necesario convertir los 30´ 15” en grados. Utilizando la equivalencia: 60” = 1´

15” = x ⇒ $x = \frac{15'' \, 1'}{60''} = 0{,}25'$ Así, 15” Ξ 0,25´

Ahora α = 42° 30,25´

Para pasar los minutos a fracción de grado utilizamos la equivalencia 60’ ≡ 1°

30,25´= x ⇒ $x = \frac{30{,}25'.1°}{60'} = 0{,}50416°$

De este modo α = 42° 30´ 15” = 42,50416°

Actualmente este procedimiento es posible realizarlo con la **calculadora** para lo cual la calculadora debe estar en la función **Deg** (degree, que quiere decir grado en inglés).

**Uso de la calculadora científica**

Traen tres sistemas de medidas angulares: sexagesimales, centesimales y radianes.

Los modos de la calculadora son los siguientes:

Sexagesimales: DEG Centesimales: GRA Radianes: RAD

La tecla para introducir grados minutos y segundos sexagesimales es ° ' "

Ejemplo: Para introducir 30°15’45” haremos: 30 ° ' " 15 º ' " 45 º ' "

El resultado es 30.2625°

Para ver cuantos grados, minutos y segundos son 30,2625° efectuaremos: 30.2625 SHIFT ° ' "

El resultado es 30°15’45”

**2. Responder.** Justificar y registrar los procedimientos de cálculo:

1) ¿Cuántos grados sexagesimales mide:

a) un ángulo llano:_____ b) un ángulo recto:_____

c) un ángulo de giro_____

2) ¿Son Verdaderas o Falsas estas proposiciones?

a) un ángulo de 300º está en el cuarto cuadrante.

b) un ángulo de 120º está en el primer cuadrante

c) un ángulo de 1500º está en el cuarto cuadrante

d) 73,26° = 73° 3´52”

e) 90° = 89°59´60”

f) 90° - 25°43´37” = 64°16´23”

## Sistema circular:

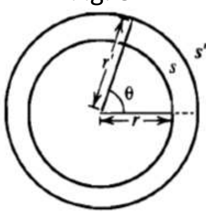
El Sistema Circular tiene como ***unidad el radián***, se utiliza en casi todas las aplicaciones trigonométricas.

La medición de un ángulo en radianes se basa en la *longitud de un arco de circunferencia*. Si situamos el vértice del **ángulo θ** en el centro de un círculo de **radio r**, entonces θ se denomina **ángulo central**.

A cada ángulo central le corresponde un sector circular y arco de circunferencia correspondiente. Si designamos **s** a la longitud del arco subtendido por θ, la medida de θ en radianes se define como:

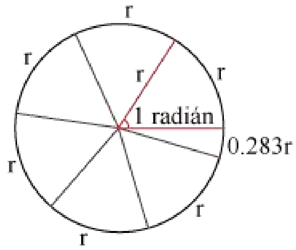
Medida del ángulo θ en **radianes** = $\frac{\text{longitud de arco}}{\text{longitud de radio}}$ $\theta = \frac{s}{r}$

Fig. 3




La medida de un ángulo en radianes no depende del tamaño de la circunferencia. Esto podría comprobarse tomando circunferencias concéntricas de distintos radios.

Fig.4




**Ángulo de 1 radián**

Cuando la longitud del arco subtendido es igual a la longitud del radio de la circunferencia, el ángulo mide un radián

Un ángulo $\theta$, de una rotación completa subtiende un arco de igual longitud que el perímetro de la circunferencia, es decir, $2\pi r$.

**Una rotación = s/r = 2πr / r = 2π radianes**

Ángulo de un giro completo: equivale a $2\pi$ radianes.

Esto se denota: $2\pi$ ó $2\pi$ rad. En general en este sistema no se escribe la unidad.

El radian es un número real, las fracciones de radianes no tienen una notación particular.

Las siguientes figuras se muestran cuatro ángulos en posición normal de $\pi/2$, -$\pi/2$, $\pi$ y $3\pi$ respectivamente.

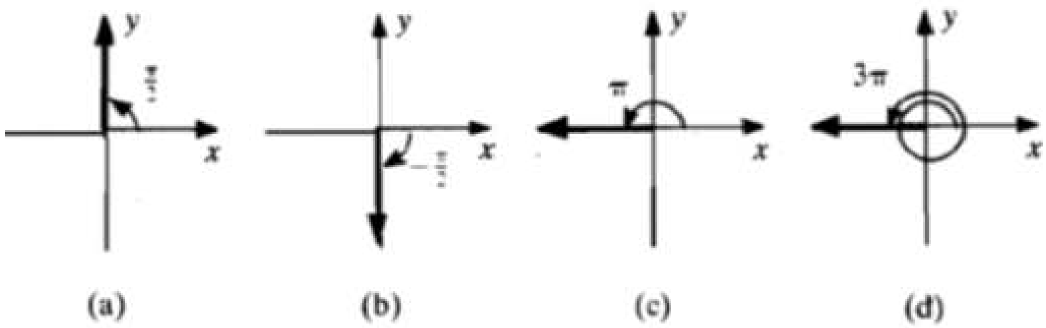



Fig 5

| |
|---|
| Es importante recordar que cuando para trabajar en el sistema circular, con esta unidad, la calculadora debe estar en la función rad (radianes). |

**3. Responder.** Justificar:

1) ¿Cuántos radianes mide?:

a) un ángulo llano:______ b) un ángulo recto:_____ c) un ángulo de giro:_____

2) ¿Son Verdaderas o Falsas estas proposiciones?

a) un ángulo de 2,5 está en el cuarto cuadrante.

b) un ángulo de $\pi/3$ está en el primer cuadrante.

c) un ángulo de 10,2 está en el tercer cuadrante.

3) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique:

a) $3{,}5 \cong \pi$

b) $\pi/4 + 3\pi/4$ = un ángulo llano

c) $\pi$ es la unidad en el sistema circular

## Longitud de arco

Si quisiéramos conocer la longitud de un arco de circunferencia subtendido por un ángulo de amplitud $\theta$, hacemos:

$$\text{Amplitud del ángulo en radianes} = \frac{\text{longitud de arco}}{\text{longitud de radio}} \qquad \theta = \frac{s}{r}$$

Longitud de arco = amplitud del ángulo en radianes **.** longitud de radio

$$s = \theta\, r$$

**4.** Si un arco de circunferencia de longitud dada ***s*** subtiende el ángulo central $\theta$ en un círculo, **encontrar** el radio de la circunferencia:

a) $s = 10$ cm $\quad \theta = 4$ b) $s = 3$ km $\quad \theta = 20°$

**5. Encontrar** la longitud del arco del sector en color de la figura 6 a y b**.**:

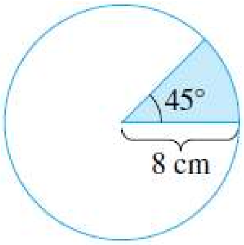



Fig 6 a

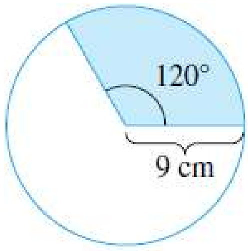



Fig 6 b

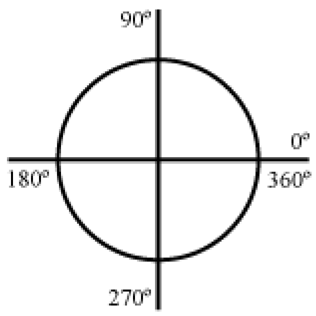
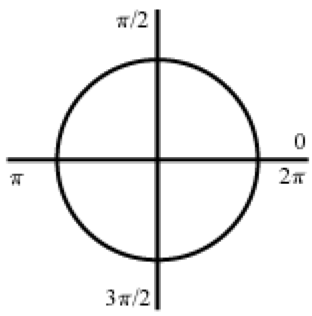
<u>Medir distancias en la Tierra</u>: La distancia entre dos puntos A y B en la Tierra se mide a lo largo de una circunferencia cuyo centro es C, en el centro de la Tierra y radio igual a la distancia de C a la superficie (figura 7) https://www.gauthmath.com/solution/1725482325980166/XI-La-distancia-entre-dos-puntos-A-y-B-en-la-Tierra-se-mide-a-lo-largo-de-una-ci .


Fig 7

**6**. Si el diámetro de la Tierra es aproximadamente______ distancia entre A y B si el ángulo ACB tiene la medida:

a) 60°    b) 45°    c) 1°

# Equivalencias entre grados sexagesimales y radianes

| Grados | Radianes |
|---|---|
|  |  |

## Conversión entre sistemas:

Para pasar de un sistema de medición a otro se puede utilizar cualquiera de las equivalencias:

$90° \equiv \pi/2$ $\qquad$ $180° \equiv \pi$ $\qquad$ $270° \equiv \frac{3}{2}\pi$ $\qquad$ $360° \equiv 2\pi$

Utilizando la segunda equivalencia, para un ángulo **α°** en el sistema sexagesimal y **$\alpha_r$** un ángulo en el sistema circular, se tienen las siguientes expresiones:

$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi} . \alpha_r \qquad\qquad \alpha_r = \frac{\pi}{180} . \alpha^{\circ}$$

**7. Responder.** Justificar:

a) ¿A cuántos grados sexagesimales equivales 1 radián?

b) ¿Cuántos radianes mide un ángulo de 1 grado?

c) Si se toma a π como 3,14 ¿qué medida de ángulo en grados sexagesimales se obtiene?

d) Con ayuda de calculadora (o sin calculadora), pasar a radianes las siguientes medidas:

| | | |
|---|---|---|
| i) 60° | ii) 585° 20´45” | iii) -270° |
| iv) 115° | v) 789° | vi) 1025° |

e) Con ayuda de calculadora (o sin calculadora), pasar las siguientes medidas a sexagesimales:

| | | |
|---|---|---|
| i) 2 radianes | ii) 8 π | iii) -12π |
| iv) 3π/4 | v) 5π/4 | vi) π |

## RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Como dijimos la palabra trigonometría se refiere a la medición de los triángulos. A continuación definiremos las seis razones trigonométricas de un ángulo:

seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, como las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

La figura 8 muestra el triángulo OAB que es rectángulo, entonces el lado AB se denomina opuesto al ángulo θ. El lado OA se llama adyacente al ángulo θ. La hipotenusa, OB, es el lado opuesto al ángulo recto.

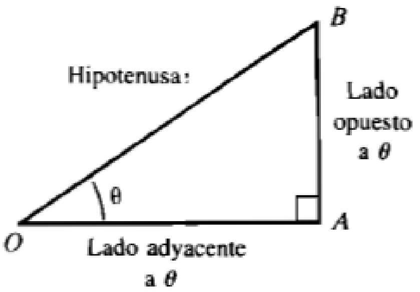



Fig. 8

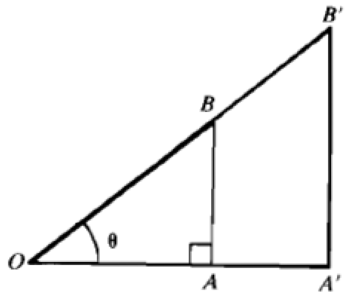



Fig 9

Las seis relaciones trigonométricas de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo se definen así:

$$sen\ \theta = \frac{longitud \text{ de cateto opuesto}}{longitud \text{ de hipotenusa}} \qquad sen\ \theta = \frac{AB}{OB}$$

$$\cos\theta = \frac{longitud \text{ de cateto adyacente}}{longitud \text{ de hipotenusa}} \qquad \cos\ \theta = \frac{OA}{OB}$$

$$\tan\ \theta = \frac{longitud \text{ de cateto opuesto}}{longitud \text{ de cateto adyacente}} \qquad \tan\ \theta = \frac{AB}{OA}$$

$$\cot an\ \theta = \frac{longitud \text{ de cateto adyacente}}{longitud \text{ de cateto opuesto}} \qquad \cot an\theta = \frac{OA}{AB}$$

$$\sec\ \theta = \frac{longitud \text{ de hipotenusa}}{longitud \text{ de cateto adyacente}} \qquad \sec\ \theta = \frac{OB}{OA}$$

$$\cos ec\ \theta = \frac{longitud \text{ de hipotenusa}}{longitud \text{ de cateto opuesto}} \qquad \cos ec\ \theta = \frac{OB}{AB}$$

Las tres primeras se denominan relaciones trigonométricas directas. Las tres últimas son las relaciones trigonométricas recíprocas de las anteriores. O sea, en símbolos se puede escribir:

$$\cos ec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}; \qquad \sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha}; \qquad ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

| |
|---|
| Los valores de las razones trigonométricas dependen únicamente de la amplitud del ángulo y no de la longitud los lados del triángulo rectángulo. |

Como lo muestra la figura 9, dos triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo θ son semejantes, y entonces las razones de los lados correspondientes son iguales. Por ejemplo:

En el triángulo OAB se tiene: $sen\ \theta = \frac{AB}{OB}$ Y en el triángulo OA´B´:

$$sen\ \theta = \frac{A´B´}{OB´}$$

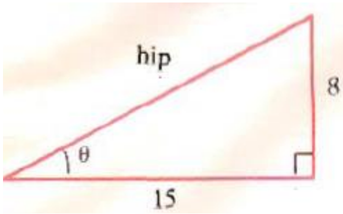
Pero como el triángulo AOB es semejante al triángulo A´OB´, se tiene que

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A´B´}{OB´}$$

Así encontramos el mismo valor para sen θ sin importar cuál sea el triángulo que utilicemos para calcularlo.

**8. Resolver** las siguientes cuestiones.

a- Encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ que nos muestra la figura.




b- ¿Qué se puede decir acerca de la unidad de estas seis razones? Considere que las longitudes de los lados del triángulo están dadas en centímetro.

c). Un topógrafo observa que en un punto A, situado al nivel del suelo a una distancia de 25 metros de la base B de una torre de comunicación, el ángulo entre el suelo y el extremo superior de la torre es de 30°.Calcule la altura de la misma.

**Uso de calculadora:**

Es posible calcular los valores de las razones trigonométricas para cualquier ángulo mediante las calculadoras científicas, con las teclas $\boxed{\text{SIN}}$, $\boxed{\text{COS}}$ y $\boxed{\text{TAN}}$. Los valores para cotangente, secante y cosecante se pueden encontrar por medio de la tecla de recíprocos $\boxed{1/x}$ o bien $\boxed{x^{-1}}$. Para hallar valores de funciones que correspondan a medidas en radianes de un ángulo, la calculadora debe estar en "modo" radianes (RAD). Para valores correspondientes a medidas en grados, seleccione el modo grados.(DEG). Por ejemplo: para hallar sen30° usamos la tecla SIN, $\boxed{\text{SIN}}$ $\boxed{30}$ $\boxed{°\ ´\ “}$ $\boxed{=}$ **0,5**, que es el valor.

**9. Utilizar** la calculadora científica para **hallar** seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) 120° | b) 16° 35’ | c) 60° 27” | d) 260° 22’ 54” |
| e) 2 rad | f) 5,5 | g) 2π rad | h) - 3/2 π |

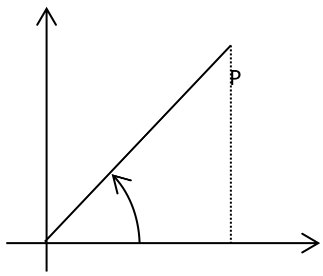
## Relación de la tangente en función del seno y el coseno

En un ángulo en posición normal, se forma un triángulo rectángulo que tiene:

Cateto opuesto **y**, cateto adyacente **x** , y como hipotenusa **r**. se cumple:

Teorema de Pitágoras: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Por lo tanto: $sen\ \theta = \frac{y}{r}$ , $\cos\theta = \frac{x}{r}$




Si se efectúa el cociente de estas dos expresiones, queda: $\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$

Esto último corresponde a la definición de **tangente** del ángulo, por lo que se tiene:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

## Ángulos especiales

Los ángulos que miden 0° (0 rad), 30° (π/6 rad), 45° (π/4 rad), 60° (π/3 rad) y 90° (π/2 rad) se dan frecuentemente en trigonometría. Por ello, y para evitar el redondeo, damos a continuación los valores de seno y coseno para estos ángulos del primer cuadrante.

**10. Completar** la tabla con la tangente de los ángulos dados, utilizando para ello la última relación obtenida.

| Grados | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Radianes | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 |
| Seno | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}$/2 | $\sqrt{3}$/2 | 1 |
| Coseno | 1 | $\sqrt{3}$/2 | $\sqrt{2}$/2 | 1/2 | 0 |
| Tangente | | | | | |

**11. Encontrar "x"** en la ecuación:

$$tan^2 45° - \ cos^2 60° = \boldsymbol{x}\ sen\ 45° \cos 45° \tan 60°$$

**12. Calcular** el valor de:

i) $tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ =

ii) $tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \ cotan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ cotan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ =

## Circunferencia Unidad o Trigonométrica

Si se considera una circunferencia de *radio unidad* ( **r = 1** ), con centro en el origen del sistema de coordenadas cartesianas O y un ángulo central θ comprendido por las semirrectas OA y OP. El ángulo θ pertenece al primer cuadrante.

"A" es la intersección del lado inicial del ángulo con la circunferencia trigonométrica.

"P" es el punto de intersección del lado terminal con dicha circunferencia (Fig. 12).

Si se considera una perpendicular por P al eje X queda determinado un triángulo rectángulo OQP sobre el que se pueden aplicar las relaciones trigonométricas.

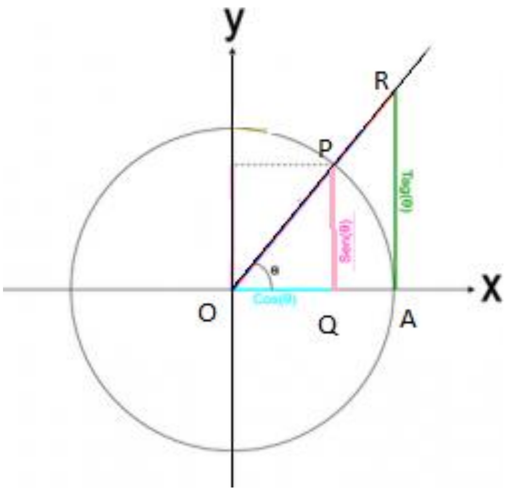



Fig. 12

En el triángulo rectángulo OQP:

$$sen\ \theta = \frac{PQ}{OP}$$

Como OP = r = 1 sen $\theta$ = PQ

Así también

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP}$$

Como OP = r = 1 cos $\theta$ = OQ

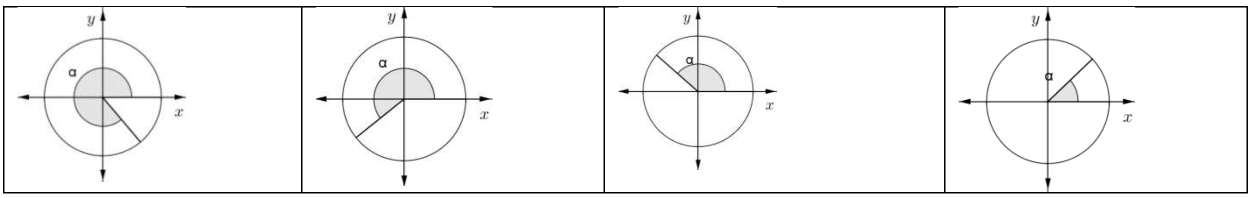
El segmento que representa la tangente de este ángulo queda determinado al trazar la perpendicular al eje X por el punto A hasta intersectar al lado terminal del ángulo $\theta$:

$$\tan\theta = \frac{AR}{OA}$$

Como OA = r = 1 tan $\theta$ = AR

**13. Determinar** en cada una de las circunferencias trigonométricas los segmentos que representan al sen$\alpha$, cos$\alpha$ y tg$\alpha$.

| a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|



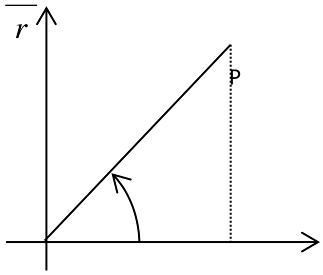
**Analizar** cuáles son los valores posibles para al sen$\alpha$, cos$\alpha$ y tg$\alpha$.

**14. Completar** la tabla con los signos de las razones trigonométricas, utilice la calculadora y las relaciones entre seno, coseno, tangente, sus recíprocas y la ubicación de los segmentos trigonométricos:

| | sen $\theta$ | cos $\theta$ | tan $\theta$ | cotan $\theta$ | sec $\theta$ | cosec $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **I cuadrante** | | | | | | |
| **II cuadrante** | | | | | | |
| **III cuadrante** | | | | | | |
| **IV cuadrante** | | | | | | |

## Relación Fundamental de la Trigonometría

Sea $\theta$ un ángulo cualquiera en posición normal y sea P(x; y) un punto sobre el lado terminal del ángulo. Por definición: $sen\ \theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$




Por el Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = r^2$

Dividiendo por $r^2$: $\left(\dfrac{x}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{r}\right)^2 = \left(\dfrac{r}{r}\right)^2$

Reemplazando en [1]: $(\text{sen}\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Esta relación entre seno y coseno de un ángulo se conoce como Relación fundamental o Identidad Pitagórica:

$$\mathbf{sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1}$$

## Relaciones Trigonométricas Inversas

Si se conoce el valor de la relación trigonométrica ¿es posible conocer el valor del ángulo correspondiente? si se sabe que *sen α = 0,5* entonces ¿cuánto vale ***α***?

Para conocer el valor del ángulo, se utilizan las relaciones inversas. Cada relación trigonométrica tiene su inversa.

En ejemplo: *¿cuál es el ángulo cuyo seno es 0,5?.*

α = arc sen 0,5 en la calculadora $\alpha = \boxed{\text{sen}^{-1}}\ \boxed{0{,}5}$ .

α = 0, 523598775 (medida en rad) equivale a **π/6**.

En otras palabras, el arco seno del número 0,5 es un número ( ángulo) medido en radianes (si la calculadora está en “modo: RAD”)

En la **calculadora** o en algunos textos se utiliza el símbolo: $\alpha$ = ***sen*** $^{-1}$ ***α*** *.*

Nótese que el “-1” en $sen^{-1}$ x no es un exponente. Indica que es la función inversa del seno.

$$(sen\ x)^{-1} = \frac{1}{sen\ x} \neq sen^{-1}x$$

Si se trabaja con la calculadora en “modo: DEG” y se hace la pregunta ¿cuál es el ángulo cuyo seno es 0,5? podemos decir que la respuesta es 30°. Entonces: α = arc sen 0,5 = 30°

Por otra parte, sen α = 0,5 es un valor positivo y en un giro completo de circunferencia, 0° ≤ α < 360°, el seno es positivo en el primer cuadrante y en el segundo cuadrante, entonces:

α = 30° o α = 180° - 30° = 150°

**Uso de calculadora**

Para encontrar el valor del ángulo a partir del coseno del mismo. Ejemplo: Si cos β= 0,456 la secuencia a realizar será: $\boxed{\text{INV}}$ (o $\boxed{\text{SHIFT}}$) $\boxed{\text{COS}}$ $\boxed{\text{0,456}}$ $\boxed{=}$ 69,856339

Si la calculadora está en modo DEG (sistema sexagesimal). Para expresarlo en $\boxed{\text{° ´”}}$, presionar $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{° ´”}}$ se obtiene: 69° 51´22,8”.

Si la calculadora está en modo RAD (sistema circular)

β = arc cos 0,456 haciendo $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{COS}}$ $\boxed{\text{0,456}}$ $\boxed{=}$ y obtendrás el número 1,0973008

En general: Si sen θ = x ⇒ θ = arc sen x

Si cos θ = x ⇒ θ = arc cos x

Si tan θ = x ⇒ θ = arc tan x

Así también, las inversas de las recíprocas son:

θ = arc cotan x		θ = arc sec x		θ = arc cosec x

**15. Determinar** el valor de:

a) $\cos(arc\ sen\frac{3}{5})$		b) $\operatorname{sen}(arc\cos(-\frac{2}{3}))$		c) $\tan(arc\tan\left(-\frac{3}{4}\right))$

**16. Verificar** si las siguientes igualdades son verdaderas.

a) $arc\ sen\ \frac{2}{\sqrt{2}} + arc\ sen\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{12}\pi$

b) $arc\ tan\ \frac{1}{2} + arc\ tan\ 1 = arc\ tan\ 0$

## NÚMEROS COMPLEJOS

Los **números complejos** son una extensión de los números reales ( R ), este conjunto de números se designa con la notación(C), siendo R el conjunto de los números reales se cumple que **R** $\subset$ **C** , R está estrictamente incluido en C. Los números complejos son la herramienta de trabajo del álgebra, análisis, así como ecuaciones diferenciales, facilitación de cálculo de integrales, tienen aplicación en muchos campos de la matemática pura y aplicada, en física y en ingeniería.

Nuestra intención no es ahondar en el estudio del conjunto numérico C, estudiaremos cuestiones básicas referentes al mismo.

**Analizar** los siguientes ejemplos de ecuaciones y a qué conjunto numérico pertenecen sus resultados.

¿Todas pueden resolver en R? completa la tabla

| **Ecuación** | **Soluciones** | **El resultado pertenece al Conj:** |
|---|---|---|
| $x^2 = 9$ | 3 , -3 | |
| $x^2 = \frac{9}{4}$ | $\frac{3}{2}$ , - $\frac{3}{2}$ | |
| $x^2 = 5$ | $\sqrt{5}$ , $-\sqrt{5}$ | |
| $x^2 = -9$ | ¿? | |

¿Cuál es la solución de $x^2 = -9$. Si los cuadrados de números reales nunca son negativos?. Para resolver esta ecuación, necesitamos el Conjunto de *números complejos* **C**, que incluye tanto a R como a números que son soluciones de ecuaciones sin resultado en R.

***Unidad imaginaria***, denotada por ***i***, que tiene las siguientes propiedades:

$$i = \sqrt{-1} \qquad\qquad i^2 = -1$$

Como el cuadrado de la **unidad imaginaria i es negativo**, la letra *i no representa un número real*. Es una nueva entidad matemática. Así, la solución de la ecuación $x^2 = -9$ la calcularemos haciendo

$$x = \sqrt{-9} = \sqrt{9\,(-1)} = \sqrt{9}\,\sqrt{-1} = +3i,\ -3i$$

3 y -3 son números reales.

Al producto de un número real por la unidad imaginaria se lo denomina **número imaginario**. El Conjunto de los Números Complejos, C, está formado por los números reales unidos a los números imaginarios.

Una forma de representar un número complejo es la denominada:

| Forma Binómica: **a + bi,** <br> ***a*** *y* ***b*** *son números reales.* |
|---|

Dado z = a + bi con **a; b ∈ R** , **a** es la parte real de z y **b** es la parte imaginaria de z

Se escribe a = Re (z), b = Im (z).

Por supuesto que la ampliación requerida para R no se obtiene simplemente agregando los números imaginarios. Se debe verificar que en el conjunto de los números complejos, la definición de las operaciones ya conocidas en R tengan sentido. Así, con el fin de construir adecuadamente este nuevo conjunto, C, se definen:

| **Terminología** | **Definición** | **Ejemplos** |
|---|---|---|
| Número complejo | *a + bi, donde a y b son números reales e* $i^2 = -1$ | $3\ ,\ 2 + i\ ,\ 4i$ |
| Número imaginario | $a + bi \quad con\ b \neq 0$ | $3 + 2i \quad -5i$ |
| Número imaginario puro | $bi \quad con\ b \neq 0$ | $-4i \quad \sqrt{3}i \quad i$ |
| Igualdad | $a + bi = c + di$ *si y sólo si* $a = c$ *y* $b = d$ | $x + yi = 3 + 4i$ *si y sólo si* $x = 3$ *e* $y = 4$ |

La definición de igualdad implica que:

Si z ; w ∈ C ; z = w ⇔ Re (z) = Re(w) ∧ Im (z) = Im (w)

Nótese que los números imaginarios puros son un subconjunto de los números imaginarios y los números imaginarios son un subconjunto de los números complejos. Usamos la frase “número complejo no real” indistintamente con “número imaginario”.

En C se definen dos operaciones: **suma** y **producto** como se indica en la siguiente tabla:

| | | |
|---|---|---|
| Suma | $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$ | $(2 + 4i) + (5 + 2\,i) = 7 + 6\,i$ |
| Producto | $(a + bi)\,(c + di) = (ac - db) + (ad + bc)\,i$ | $(2 + 4i)\,(5 + 2\,i) = 2 + 22\,i$ |

Para realizar las operaciones:

<u>Suma</u>: sumar parte real con parte real e imaginaria con imaginaria

<u>Producto</u>: $(a + bi)\,(c + di)$ se aplica leyes distributivas $(bi)\,(di) = bdi^2 = bd(-1) = -bd$

Se sustituye: $i^2$ por $-1$.

<u>Ejemplos</u>:

a) $(3 – 5i) + (7 + i) = (3 + 7) + (-5 + 1)\,i = 10 – 4i$

b) $(3 + 4i)\,(2 + 5i) = 3\,.\,2 + 3\,.\,5\,i + 4\,i\,2 + 4\,i\,5\,i = 6 + 15\,i + 8i + 20\,i^2 =$

$= 6 + 15\,i + 8i + 20\,(–1)$

$= –14 + 23\,i$

**<u>Otras definiciones</u>**:

| **Terminología** | **Definición** |
|---|---|
| Diferencia (resta) | $(a + bi) – (c + di) = (a – c) + (b – d)\,i$ |
| Multiplicación por un número real k | $k\,(a + bi) = ka + (kb)i$ |

**17. Resolver**:

1) (a) $4\,(2 + 5i) – (3 – 4i)$ (b) $(4 – 3i)\,(2 + i)$ (c) $i\,(3 – 2i)^2$

**18. Determinar**:

1) ***x*** e ***y*** de modo que $z_1 + z_2 = 0$.  $z_1 = (2x+1) + y\,i$  y  $z_2 = -y + 2\,i$.

2) los valores de m y n para que el número complejo $z = (m^2 - 4) + (n^3 - 27)\,i$ sea un imaginario puro.

**19. Indicar** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justificar** resolviendo:

a) Los números complejos $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ y $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ son soluciones de la ecuación $5x^2 + 2x + 1 = 0$

b) La ecuación $x^3 - 1 = 0$ tiene una única solución en C y esa solución es 1.

# Potencias de la unidad imaginaria

$i^0 = 1$  $i^1 = i$  $i^2 = -1$  $i^3 = -i$

A partir de la cuarta potencia, los resultados se repiten: $i^4 = 1$; $i^5 = i$, $i^6 = -1$; $i^7 = -i$

¿Cómo justificas esto?

Los valores se repiten de cuatro en cuatro, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de *i*, se divide el exponente entre 4, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada. Por ejemplo:

$i^{22} = -1$ ( 22 dividido 4 da cociente 5 y resto 2, como $i^2 = -1$, entonces $i^{22} = -1$ )

**20. Resolver** :

a) $i^{14}$.  b) $(-i^5)^3$.  c) $i^{-10}$.

## Conjugado de un número complejo

Si z = a + bi es un número complejo, entonces su conjugado, denotado por $\bar{z}$ es a – b i.

**Propiedades de conjugados** **Ejemplos**

(a + bi) + (a - bi) = 2a  (4 + 3i) + (4 – 3 i) = 4 + 4 = 2 . 4 = 8

(a + bi) (a - bi) = $a^2 + b^2$  (4 + 3i) (4 – 3 i) = $4^2 - (3i)^2 = 4^2 3^2 i^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

La suma y el producto de un número complejo y su conjugado son números reales.

Los conjugados son útiles para hallar inversos multiplicativos de a + bi , $\frac{1}{(a + bi)}$ o para simplificar cocientes de dos números complejos.

## Cociente de números complejos en forma binómica

Para poder dividir dos números complejos, debemos valernos de una propiedad de los números reales, que establece que si en toda fracción multiplicamos el numerador y el denominador por un número real distinto de cero, dicha fracción no cambia.

Esta propiedad se extiende al campo de los números complejos, de tal manera que para dividir dos complejos, multiplicamos el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor, es decir, si $z_1$ = a + bi y $z_2$ = c + di, el procedimiento general es:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \bar{z}_2}{z_2 . \bar{z}_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac + a(-di) + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{(ac+bd) - (ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

y la expresión del número complejo cociente es: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2} i$

Ejemplo: Dados los complejos $z_1 = 2 - 4i$   $z_2 = -1 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-4i}{-1+3i} = \frac{(2-4i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-2-6i+4i-12}{(-1)^2+(3)^2} =$$

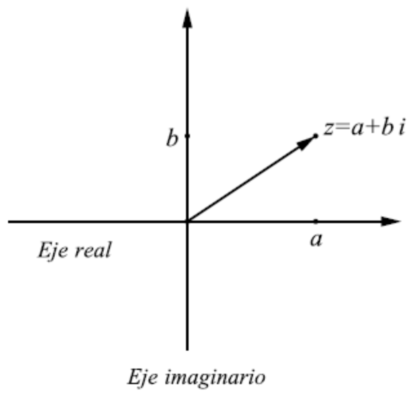
$$\frac{-14-2i}{10} = -\frac{14}{10} - \frac{2}{10} i = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5} i$$

**21. Resolver** :

a) $\dfrac{1}{9+3i}$ b) $\dfrac{7-i}{3-5i}$

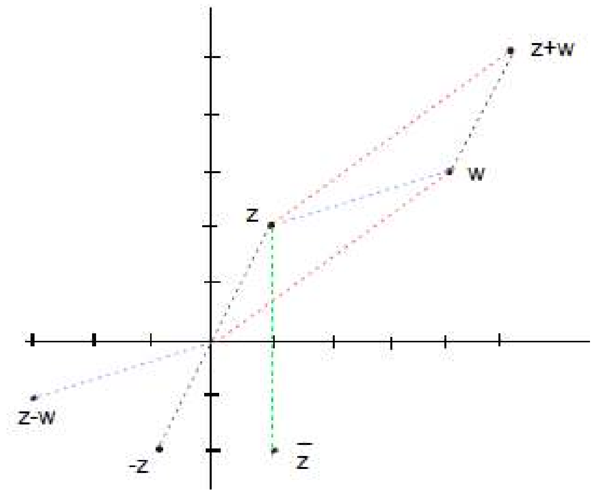
# El plano complejo - Representación gráfica

Puesto que los números complejos están definidos como pares ordenados de números reales, resulta natural representarlos en el plano, asignando a cada z = a + bi el punto de coordenadas cartesianas (a ; b). Es claro entonces que a cada número complejo le corresponde un punto del plano y que cada punto del plano representa un número complejo. Este modelo geométrico de C será llamado el **plano complejo**.




Ejemplo: Grafiquemos en el plano complejo:

*a) z* = 1 + 2*; b) w* = 4 + 3*i; c) -z ; d)* $\bar{z}$*; e) z + w ; f) z – w*



**22. Resolver**: Dados z = 1+3 i y w = 4+2 i, representar en el plano los siguientes números complejos

a) z b) w c) z + w d) z – w e) –z f) 2z g) (1/2) w

## **Bibliografía**:


Falco, Alfredo.(2004). *Matemática Preuniversitaria*. Universidad Nacional de Córdoba.

Tarzia, Domingo A. (2000), *Curso de Nivelación de Matemática.* Mc Graw Hill. Argentina.

Zill, D y Dewar, J. (2001) Álgebra y Trigonometría. Editorial McGraw Hill.

Leithold, L. (2007) Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Editorial Oxford.

Swokowski, E. y Cole, J. (2008) Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. CENGAGE Learning


## ACTIVIDADES PROPUESTAS

### *¡Para seguir avanzando!*

**Actividad 1**: Expresar en radianes cada uno de los ángulos siguientes

a) 30°

b) 135°

c) 25° 30´

d) 42° 24´35”

**Actividad 2**: Expresar en grados, minutos y segundos cada uno de los ángulos siguientes

a) $\pi/3$ rad b) $5/9\ \pi$ rad c) $2/5\ \pi$ rad d) $4/3\ \pi$ rad

**Actividad 3**: Un ángulo central determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 30 cm de radio. Expresar el ángulo central $\theta$ en radianes y en grados.

**Actividad 4**: Una vía férrea ha de describir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en 25° en un recorrido de 120 m?

**Actividad 5**: Encontrar los valores de las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados: a) a = 1, b = 1; b) a = 2 , b = 5.

**Actividad 6**: Una antena de 20 m de altura, se encuentra sujeta por un cable de 35 m. Calcular la distancia existente entre la base de la antena y el extremo del cable.

**Actividad 7**: ¿Cuál es el ángulo de inclinación del sol cuando un objeto de 6m proyecta una sombra de 10,3m?

**Actividad 8**: Un alambre de suspensión mide 13,6 m de largo, y está sujeto a un poste a 6,5 metros sobre el nivel del suelo ¿Que ángulo forma el alambre con el suelo?

**Actividad 9**: Problemas que involucran a aplicación de trigonometría a **resolución de triángulos rectángulos**

a. Calcular la altura que debe tener una escalera para que apoyada en una pared alcance una altura de 2,85m, al formar con el plano del piso un ángulo de 1 radian.

b. La cuerda de un barrilete forma un ángulo de 31º40´con el nivel del piso y tiene una longitud de 45, 5 metros ¿A qué altura se encuentra el barrilete?

c. Una persona se encuentra a 120m de un árbol, y observa que la línea visual de la punta del árbol forma un ángulo de 32° con la horizontal. Calcular la altura del árbol sobre el nivel de sus ojos.

d. Calcular la superficie de un triángulo isósceles de 151m de base, sabiendo que el ángulo opuesto a ella es de 105º12´40.