Rev. Cienc. Tecnol.
Año 6 / Nº 6 / 2004 / 12-15

MODELO DE PRODUCCIÓN DE COSTO MÍNIMO

Petryla, E. J.[1] / Iglesias, O. A.[2]
[1]Departamento de Matemática,Facultad de Ciencias Exactas Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Misiones, E-mail: petryla@fceqyn.unam.edu.ar
[2]Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, E-mail:oaiglesi@volta.ing.unlp.edu.ar

ABSTRACT

MINIMAL PRODUCTION COST MODEL

The mathematical model that is presented in this work, allow us to obtain the optimal production program at minimal cost, subject to constrains on the variables. It can be applied to all industries that manufacture many articles and it has been used to obtain the optimal program of de Cooperativa Agrícola Mixta de Montecarlo Ltda., in its yerba mate section.

KEY WORDS: Simplex, linear programming, production program, optimization.

RESUMEN

El modelo matemático que se propone en este trabajo permite obtener el programa de producción óptimo a costo mínimo, satisfaciendo las restricciones dentro de las que está operando la planta. Puede ser aplicado a toda industria que elabore un número importante de productos y fue utilizado para obtener el programa óptimo de la Cooperativa Agrícola Mixta de Montecarlo Ltda., en su sector yerbatero.

PALABRAS CLAVES: Simplex, programación lineal, programa de producción, optimización.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo nos proponemos el diseño de un modelo matemático lineal, mediante el cual se pueda obtener un programa de producción con un costo mínimo, satisfaciendo las condiciones dentro de las cuales se está desarrollando dicha producción. La aplicación de este modelo a un caso real será tema de un próximo artículo.

Enfocando el tema desde una óptica general, consideremos el conjunto R_+^n, cuyos elementos son las n-uplas $x^T=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de números reales no negativos que representan los programas de producción posibles de los n artículos que se elaboran en una planta industrial. La primer tarea será la caracterización de una función $c: R_+^n \to R$ definida mediante la correspondencia $x^T \mapsto c(x^T)$, la que representa el costo del programa de producción x^T. Para lograr este primer objetivo, se hará un análisis de los costos involucrados, separándolos en variables y fijos. La función c tendrá, por lo tanto, dos componentes: la primera tendrá en cuenta los costos variables y será lineal y la segunda, que considerará los costos fijos, será constante.

La función c será el objetivo del modelo; a ella deberemos agregar las restricciones propias de la planta que tienen que ver, fundamentalmente, con la demanda de cada uno de los productos, disponibilidad de materia prima, capacidad de cada uno de los equipos, etc. La función objetivo conjuntamente con las restricciones (que serán lineales), caracterizarán un problema del tipo:

$$\min c(x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ sujeto a } Ax=b \qquad (1)$$

donde $A \in \mathrm{M}_{r,n}(R)$, siendo r es el número de restricciones y $b^T=(b_1,b_2,\ldots,b_r)$ es el vector cuyos elementos son los lados derechos de las restricciones.

CARACTERIZACIÓN TEÓRICA DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Componentes de la función de costos

En el modelo que se pretende diseñar, la función objetivo es $c: R_+^n \to R$ definida por:

$$x^T=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mapsto c(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Dicha función estará compuesta de dos partes, relacionadas cada una de ellas con el comportamiento del costo respecto a la producción o, dicho de otro modo, con su carácter de variable o fijo. En tal sentido se puede decir que: $c(x_1,x_2\ldots,x_n)=\tilde{c}(x_1,x_2\ldots,x_n)+\bar{c}$ donde $\tilde{c}$ y $\bar{c}$ son los costos variables y fijos anuales, respectivamente, expresadas en \$/año.

La componente variable del costo de producción

Como sabemos, el costo variable que implica producir un artículo j es directamente proporcional a la producción de dicho artículo por lo tanto:

$$\tilde{c}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

donde a_j es el costo variable de producción de una unidad del artículo j (\$/kg).

Obviamente, x_j, la producción del artículo j, es la variable de nuestro modelo, por lo que su valor es, *a priori*, desconocido. Para caracterizar el costo variable total en función de la producción de cada uno de los artículos, debemos buscar el modo de evaluar el vector $a^T=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, que es el vector de los costos variable unitarios. En este trabajo proponemos hacerlo de acuerdo a los siguientes pasos:

i) Se divide la planta en secciones, correspondiendo cada sección a un equipo. Bajo la suposición de la existencia de p secciones, se denotara con S_k, con k=1, 2, …, p, a la sección k-ésima.

ii) Se computa el tiempo máximo de trabajo anual, en horas, teniendo en cuenta el número de turnos diarios y el número de días laborables por año. Ese tiempo, que será un valor constante para todas las secciones, se denotará con t (h/año).

iii) Cada sección S_k tiene una capacidad de producción. Con q_{jk} (kg/h) se denotará la capacidad de elaboración del producto j-ésimo por parte de la sección k-ésima. De allí surge que: $p_{jk}=q_{jk}t$ donde p_{jk} (kg/año) es la capacidad máxima anual de producción de j por parte de la sección k-ésima.

iv) Se computan los costos variables, por hora de funcionamiento, de cada sección. Si denotamos con $\tilde{c}^k$ al costo variable de una hora de funcionamiento correspondiente a la sección k, entonces podemos obtener la relación:

$$a_{jk}=\frac{\tilde{c}^k t}{p_{jk}}$$

Entonces, es fácil deducir que:

$$a_j=\sum_{k=1}^{p} a_{jk} \qquad (2)$$

Por lo tanto: $a=(a_1,a_2,\ldots,a_j,\ldots,a_n)=$

$$=\left(\sum_{k=1}^{p} a_{1k}, \sum_{k=1}^{p} a_{2,k}, \ldots, \sum_{k=1}^{p} a_{jk}, \ldots, \sum_{k=1}^{p} a_{nk},\right)$$ y, por ende:

$$\tilde{c}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j \qquad (3)$$

es la expresión mediante la cual se puede evaluar el costo variable total en función de la producción de cada uno de los productos. Todos los datos que se necesitan para caracterizar al vector a se pueden obtener o estimar en planta.

La componente fija del costo de producción

La componente fija del costo de producción se puede caracterizar siguiendo los pasos que se mencionan a continuación.

i) Se considera la planta dividida en p secciones, las mismas que se han considerado en el análisis de los costos variables.

ii) Se identifican los costos fijos para cada una de las secciones. Si el número de costos fijos es m, tendremos:

$$\bar{c}_k = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{ik}$$

donde $\bar{c}_k$ es el costo fijo total correspondiente a la sección k-ésima y $\bar{c}_{ik}$ es el costo fijo i en la sección k. Todas las unidades son en \$/año.

iii) Se evalúa el costo fijo total para toda la planta. Si dicho costo lo denotamos con $\bar{c}$, entonces:

$$\bar{c} = \sum_{k=1}^{p} \bar{c}_k = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=n}^{m} \bar{c}_{ik} \qquad (4)$$

Función de costo total de producción

A partir de (2), (3) y (4), podemos concluir que la función que define el costo de una producción es:

$$c : X \to R;\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} c_{ik} \qquad (5)$$

que es una aplicación lineal convexa.

Como se puede apreciar, la clave para lograr diseñar un modelo que sea una buena traducción de la realidad estará en la evaluación de los coeficientes de costo variable a_{jk} y de los costos fijos para cada sección $\bar{c}_k$.

RESTRICCIONES DEL MODELO

Las restricciones no se pueden definir con precisión para un modelo general, sino que deberán ser caracterizadas a partir de los datos que surjan en planta. Sin embargo, entre ellas seguramente estarán:

i) La demanda de cada uno de los n productos. A partir de los datos de demanda de años anteriores, se obtendrán desigualdades del tipo: $x_j \geq d_j;\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$

ii) La disponibilidad de materia prima dará lugar a una restricción del tipo:

$$\sum x_j \leq p$$

donde p es la máxima producción total posible a partir de la materia prima disponible.

iii) Existirán restricciones dadas por las capacidades de los equipos, las que serán del tipo: $x_j \leq q_{jk};\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$ y $k \in \{1,2,\ldots m\}$

iv) Toda otra restricción relacionada con las condiciones dentro de las cuales se está elaborando los n productos, que deberá surgir de un estudio *in situ*.

Todas las restricciones serán lineales y, por lo tanto, constituirán un sistema de inecuaciones del tipo $Ax \geq z$, que definirán una región factible convexa. Por otra parte, todo sistema del tipo $Ax \geq z$ siempre podrá transformarse en el sistema $Ax = b$.

EL MODELO

Al margen de que las restricciones deberán ser precisadas para cada caso en particular, podemos decir que el problema (1) queda caracterizado de la siguiente manera:

$$\min c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} c_{ik} \text{ sujeto a:}$$

$$Ax = b \qquad (6)$$

Por lo tanto, estamos ante un modelo lineal y, por consiguiente, convexo.En este caso, la condición necesaria de Karush-Kuhn-Tucker [1] también es suficiente, y la solución se encuentra en alguno de los vértices de la región factible. Su búsqueda puede realizarse utilizando la técnica Simplex [2] existiendo en el mercado muchos paquetes informáticos muy buenos para ello, entre los que cabe mencionar el GAMS [3] y el LINDO.

APLICACIÓN A UN CASO REAL

En principio, el modelo propuesto se puede utilizar para cualquier tipo de industria que elabore muchos productos. Como tal, fue probado utilizando como fuente de datos a la Cooperativa Agrícola Mixta de Montecarlo Ltda., en sus sectores relacionados con la yerba mate [4].

La Cooperativa mencionada posee tres secaderos propios y un molino, elabora 43 productos distintos, considerando productos distintos a las yerbas de marcas distintas, diferentes empaques, que se pueden elaborar en distintos equipos y las yerbas canchadas provenientes de cada uno de los secaderos.

En este caso se ha optado por considerar a cada equipo de la planta como una sección, con lo que han resultado 51 secciones. El hecho de considerar a cada equipo como una sección y no haber optado por una división más gruesa, tiene que ver con la precisión que se quería obtener en los resultados, a los efectos de obtener un panorama detallado de la estructura de costos para cada uno de los equipos.

Del trabajo realizado, se pudieron extraer las siguientes conclusiones:

i) La existencia de 48 productos y 51 secciones implica que la matriz (a_{jk}) pertenece a $M_{48,51}(R)$. Esta matriz fue evaluada con mucho detalle, utilizando la planilla de cálculo Excel. Ello posibilitó, por un lado, calcular los elementos del vector a utilizando (2) y por otro, tener la posibilidad de actualizar dicho vector con los cambios de las variables de costos. Además, la misma matriz (a_{jk}) resultó ser muy útil, ya que proporciona un mapa muy detallado de la estructura de costos para cada sección y para cada uno de los productos. Cabe acotar que, utilizando el método propuesto, los valores de costos variables unitarios y costos fijos resultaron dentro de los rangos que se manejaban en planta.

ii) El modelo construido para la Cooperativa consta de una función objetivo de 48 variables y un sistema de 74 restricciones lineales. La solución del problema de minimización de costos, en términos del programa de producción, fue hallada utilizando los programas GAMS y LINDO; los resultados mostraron un programa de producción óptimo diferente al utilizado en planta, con costos totales de elaboración sustancialmente menores. Esto significa que el programa de producción se puede ir perfilando hacia el óptimo, con el objeto de disminuir los costos.

iii) Se realizó un completo estudio de sensibilidad post-optimal; como bien sabemos, el óptimo hallado es la fotografía de una realidad que puede variar de un momento a otro con el cambio de las variables del modelo. El análisis de sensibilidad nos permite anticipar el cambio que sufrirán los costos ante hipotéticas variaciones de las variables. En tal sentido, además de los valores óptimos, fueron hallados los costos reducidos para cada variable, los que posibilitaron conocer los rangos dentro de los cuales pueden modificarse los costos unitarios sin salirnos del vértice óptimo hallado. También fueron evaluados los multiplicadores de Lagrange para cada una de las restricciones; demás está recalcar la importancia del signo y valor absoluto de dichos multiplicadores en el estudio de sensibilidad.

iiii) Para todas las restricciones activas fueron construidas las graficas del comportamiento del costo variable en función del lado derecho de cada restricción; estas gráficas permiten prever el comportamiento del costo total ante cada variación posible del lado derecho de las restricciones, lo que posibilita tomar medidas anticipadas que permitan aprovechar de la manera mas conveniente dicho comportamiento.

CONCLUSIONES

El modelo ha probado ser útil para obtener datos importantes a los efectos de perfilar el programa de producción de la Cooperativa de Montecarlo hacia otro cuyos costos son menores. Al margen de esto, utilización de la hoja de cálculo para evaluar la matriz (a_{jk}) permite contar con un mapa muy detallado de la estructura de costos en cada sector de la planta, los que pueden actualizarse muy fácilmente ante cada cambio en las variables involucradas.

Si bien, el modelo fue utilizado en una planta yerbatera, con pequeñas adecuaciones puede aplicarse a toda industria que fabrique un número significativo de productos. ●

REFERENCIAS

1. Nocedad, J.; Wright, S. J.
Numerical Optimization, Springer, 1999.
2. Dantzig, G. B.
Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, New Jersey, 1963.
3. Broocke, A.; Kendrick, D.; Meeraus, A.; Raman, R.
GAMS, Gams Development Corporation, 1988.
4. Petryla, E. J.
Programa de Producción de Costo Mínimo, Tesis presentada para el grado de Magíster, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 2003.

Recibido: 25 de Febrero de 2004.
Aprobado: 25 de Octubre de 2004.